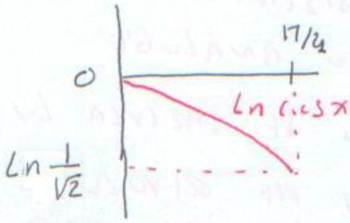
AVR PRÁCTICA-16

Nombre y apellidos..

1.- Calcula la longitud de la gráfica de la función: $f(x) = \ln(\cos x)$, $x \in [0, \pi/4]$.



$$\text{Long } f = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + f'(x)}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \left(\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\, dx =$$

$u = \operatorname{sen} x$

$du = \cos x\, dx$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

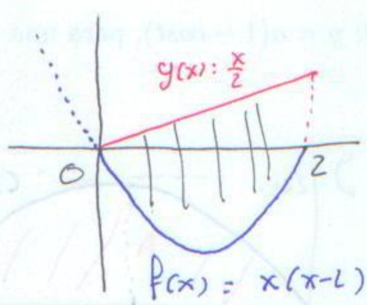
$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{1 - u^2}\, du = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1/2}{1+u} + \frac{1/2}{1-u}\, du =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|1+u| \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{2} \ln|1-u| \Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \ln \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \ln \sqrt{\frac{1 + 1/\sqrt{2}}{1 - 1/\sqrt{2}}}$$

2.- Halla el área del recinto del plano limitado por: $f(x) = x(x-2)$ y $g(x) = x/2$ para $x \in [0, 2]$.



$$\text{Area buscada} = A =$$

$$= \int_0^2 |f(x) - g(x)|\, dx =$$

$g > f$ ver gráficos

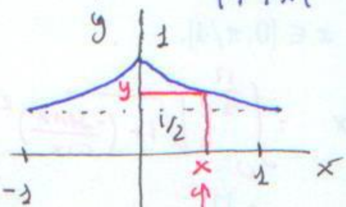
$$= \int_0^2 \frac{x}{2} - x(x-2)\, dx =$$

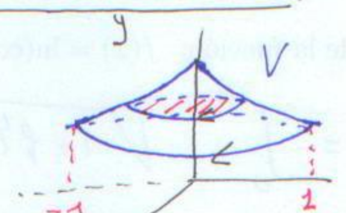
$$= \int_0^2 \frac{x}{2} - x^2 + 2x\, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 \Big|_0^2 =$$

$$= \frac{2^2}{4} - \frac{2^3}{3} + 4 = 5 - \frac{8}{3} = \boxed{\frac{7}{3}}$$

3.- Calcula el volumen del sólido de revolución que se produce al girar la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$, $x \in [-1, 1]$, respecto del eje de ordenadas ($x = 0$).

$f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$ FUNCIÓN PAR





PROCEDIENDO DE MODO ANÁLOGO A COMO SE CALCULA EL VOLUMEN DE REVOLUCIÓN RESPECTO DEL EJE $X = 0$

$y = \dfrac{1}{1+|x|}$

$\Rightarrow 1+|x| = \dfrac{1}{y}$

$\boxed{|x| = \dfrac{1}{y} - 1}$

$$V = \int_{1/2}^{1} \pi \left(\frac{1}{y} - 1\right)^2 dy = \pi \int_{1/2}^{1} \frac{(1-y)^2}{y^2} dy =$$

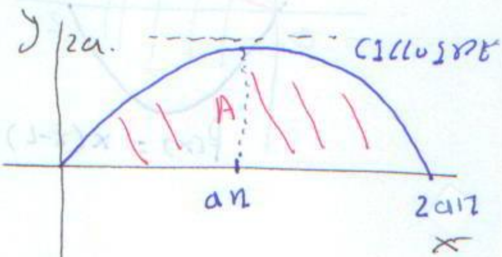
$$= \pi \int_{1/2}^{1} 1 - \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2}\, dy = \pi \left(y - 2\ln y - \frac{1}{y} \right|_{1/2}^{1} =$$

$$= \pi \left[1 - 0 - 1 - 1/2 + 2\ln(\tfrac{1}{2}) + 2 \right] = \pi \left(3/2 - \ln 4 \right) > 0$$

4.- Halla el área encerrada por un lazo de *cicloide* $x = a(t - \operatorname{sen} t)$; $y = a(1 - cost)$, para una constante $a > 0$. (**Teorema de Galileo**).

REPRESENTACIÓN DE LA CICLOIDE

$$\left.\begin{array}{l} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \\ x'(t) = a(1-\cos t) \geq 0 \quad \text{CRECIENTE} \\ y'(t) = a \operatorname{sen} t \begin{cases} \geq 0 & \text{SI } t \in [0, \pi] \\ < 0 & \text{SI } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$$



ADEMÁS $t = 0$ ó $2\pi \Rightarrow y(t) = 0$

$x(0) = 0$, $x(\pi) = a\pi$ $x(2\pi) = 2a\pi$.

ÁREA, EL ÁREA $A = \displaystyle\int_0^{2\pi a} y(x)\, dx =$ NO TENEMOS y DESPEJADA EN FUNCIÓN DE "x",

POR EL CAMBIO

$x = a(t - \operatorname{sen} t)$

$\Rightarrow y(x) = a(1 - \cos t)$

$dx = a(1-\cos t)\, dt$

SI $x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 2\pi a \Rightarrow t = 2\pi$

$$= \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} a^2 - 2a^2 \cos t + a^2 \cos^2 t\, dt =$$

$$= a^2 2\pi - \underbrace{\left(2a^2 \operatorname{sen} t \right|_0^{2\pi}}_{0} + a^2 \left(\frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + \frac{t}{2} \right|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi a^2 + a^2 \frac{2\pi}{2} = \boxed{3\pi a^2}$$