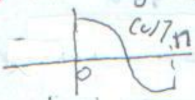
# AVR PRÁCTICA-17

**Nombre y apellidos.........................................................**

1.- a) Demuestra que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x-y|$.
b) Prueba que si $x \neq y$, entonces $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| < |x-y|$.

a) $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \cos \gamma \, (x-y) \Rightarrow |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x-y|$.
T VALOR MEDIO $\gamma \in [x,y]$ $\quad |\cos\gamma| \leq 1$

b) Si $x,y \in [0,\pi)$, $\gamma \in (x,y) \subseteq [0,\pi)] \Rightarrow \cos\gamma \neq 1 \Rightarrow |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| < |x-y|$.



Si $0 \leq x \leq \pi < y < 2\pi$, $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq$
$\leq |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\pi| + |\operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} y| < |x-\pi| + |\pi - y| =$
$= \cancel{\pi} - x + y - \cancel{\pi} = |x-y|$

2.- a) Prueba que para $0 < x < \pi/4$ se tiene que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x}.$$

b) Deduce que $\cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ y (sin usar L'Hôpital) que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

a) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0| < |x-0| \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2}$ (HEMOS USADO LA DESIGUALDAD ANTERIOR)

Por otro lado $|\tan x - \tan 0| = |1+\tan^2\gamma|\, x > x \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x} > \frac{x}{2}$
T VALOR MEDIO
$\gamma \in (0,x)$, $x \in [0,\frac{\pi}{4}]$

b) Si $x \in [0,\frac{\pi}{4}]$, $\cos x > 0 \Rightarrow$ $\frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ así $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

LUEGO $\quad \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$
$\downarrow x\to 0 \quad \downarrow x \to 0 \quad \downarrow x\to 0$
$1 \quad 1 \quad 1$

3.- Halla los polinomios de Taylor, del grado indicado y en el punto indicado, de las siguientes funciones:
$f(x) = e^x$, grado $n$ en 1.

$f^{n)}(x) = e^x \quad \forall n$ y así $f^{n)}(1) = e \quad \forall n \in \mathbb{N}$

LUEGO $P_{n,1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e}{k!}(x-1)^k$

$f(x) = e^{e^x}$, grado 3 en 0.

$f(0) = e^1 = e$

$f'(x) = e^x e^{e^x} \Rightarrow f'(0) = e$

$f''(x) = e^x e^{e^x} + (e^x)^2 e^{e^x} \Rightarrow f''(0) = 2e$

$f'''(x) = e^x e^{e^x} + (e^x)^2 e^{e^x} +$
$+ 2e^x e^x e^{e^x} + (e^x)^3 e^{e^x} \Rightarrow f'''(0) = 5e$

LUEGO $P_{3,0}(x) = e + ex + ex^2 + \frac{5e}{6}x^3$

4.- Halla los polinomios de Taylor (del grado indicado y en el punto indicado) para las siguientes funciones:

$f(x) = \frac{1}{x+1}$, grado $n$ en 0.

$f(x) = \frac{1}{x+1}$, $f(0) = 1$, $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$, $f'(0) = -1$

$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ $f''(0) = 2$, $f'''(x) = \frac{-3!}{(x+1)^4}$ ¿ $f^{k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x+1)^{k+1}}$ ?

SE PRUEBA POR INDUCCIÓN $f^{k+1)}(x) = \frac{(-1)^k k! \, (-(k+1))(x+1)^k}{(x+1)^{2(k+1)}} = \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(x+1)^{k+2}}$

LUEGO $f^{k)}(0) = (-1)^k k! \Rightarrow P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, grado $2n$ en 0.

OBSERVAMOS QUE SI $g(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f(x) = g(x^2)$ USANDO LO DE ARRIBA ¿ $P_{2n,0,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x^2)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}$ ? LA RESPUESTA ES SI YA QUE $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}}{x^{2n}} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{g(x^2) - P_{g,n,0}(x^2)}{(x^2)^n} \underset{\substack{x\to 0\\ x^2\to 0}}{=} \lim_{x^2\to 0} \frac{g(x^2) - P_{g,n,0}(x^2)}{(x^2)^n} = 0$$

PROPIEDAD DEL TAYLOR

EL POLINOMIO DE TAYLOR ÚNICO CON ESTA PROPIEDAD

$f(x) = \cos x$, grado $2n$ en $\pi$.

$f(x) = \cos x$ $f(\pi) = -1$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x$ $f'(\pi) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ $f''(\pi) = 1$

$f'''(x) = \operatorname{sen} x$ $f'''(\pi) = 0$

$f^{IV)}(x) = \cos x$ $f^{IV)}(\pi) = -1$

etc. etc.

$$\Rightarrow P_{2n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}(x-\pi)^{2k}$$

$f(x) = \ln x$, grado $n$ en 2.

$f(x) = \ln x \Rightarrow f(2) = \ln 2$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f''(x) = \frac{-1}{x^2}$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$

$f^{IV)}(x) = \frac{-3!}{x^4}$

¿ $f^{k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$ ?

CLARO SE PRUEBA POR INDUCCIÓN

$$\Rightarrow \boxed{P_{n,2}(x) = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2^k k!}(x-2)^k = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k\, 2^k}(x-2)^k}$$