AVR PRÁCTICA-18

Nombre y apellidos...

1.- Prueba que si $x > 0$, entonces

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

Utiliza la desigualdad anterior para aproximar $\sqrt{1,2}$ y $\sqrt{2}$; y da una estimación del error cometido. Utiliza el polinomio de Taylor para $n = 2$ para obtener una aproximación más precisa de $\sqrt{1,2}$ y de $\sqrt{2}$.

$f(x) = \sqrt{1+x}$, $f(0) = 1$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$; $f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}$ $f''(0) = -\frac{1}{4}$;

$$f'''(x) = \frac{3}{8}\,\frac{1}{(1+x)^{5/2}}$$

$$f(x) = P_{1,0}(x) + R_{1,0}(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \underbrace{\int_0^x -\frac{1}{4(1+t)^{3/2}}\,\frac{(x-t)}{1!}\,dt}_{\text{NEGATIVO } (t\in(0,x))}$$

FÓRMULA INTEGRAL DEL RESTO

$$f(x) \leq 1 + \frac{1}{2}x.$$

LUEGO

$$f(x) = P_{2,0}(x) + R_{2,0}(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underbrace{\int_0^x \frac{3}{8(1+t)^{5/2}} \cdot \frac{(x-t)^2}{2!}\,dt}_{\text{POSITIVO}}$$

LUEGO $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \leq f(x)$.

PARA $x = 0,2$, $\sqrt{1,2} = \sqrt{1+0,2}$ y

$$\underline{1 + \frac{0,2}{2} - \frac{(0,2)^2}{8}} < \sqrt{1,2} < 1 + \frac{0,2}{2}, \text{ ASÍ}$$

$$1,095 < \sqrt{1,2} < 1,1$$

EL ERROR QUE COMETEMOS ES A LO MÁS $1,1 - 1,095 = \boxed{0,005}$

PARA $x = 1$, $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$ y

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = 1 + 3/8 < \sqrt{2} \leq 1 + \frac{1}{2} \quad \text{ERROR } \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right| = \frac{1}{8} = 0,125$$

AHORA $f(x) = P_{2,0}(x) + R_{2,0}(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \int_0^x \frac{3}{16}\,\frac{(x-t)^2}{(1+t)^{5/2}}\,dt$

P TAYLOR

$$|R_{2,0}(x)| \leq \int_0^x \frac{3}{16}\,\frac{(x-t)^2}{(1+t)^{5/2}}\,dt \underset{1+t>1 \text{ si } x>0}{\leq} \int_0^x \frac{3}{16}(x-t)^2\,dt = \frac{3}{16}\left(-\frac{(x-t)^3}{3}\right|_0^x =$$

$$= \frac{3}{16}\cdot\frac{x^3}{3} \underset{x\in[0,1]}{\leq} \frac{1}{16} \leq 0'0506. \text{ ERROR MÁXIMO DE}$$

$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ EN LUGAR DE $\sqrt{1+x^2}$ SI $x \in [0,1]$.

2.- Sea $f(x) = \ln(x+1)$. Calcula su serie de Taylor centrada en $a = 0$. ¿Para que valores de x coincide la serie con la función?

$$f(x) = \ln(x+1), \quad f'(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{1+x-x}{x+1} = 1 - \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{x+x^2-x^2}{1+x} =$$

$$= 1 - x + \frac{x^2}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2+x^3-x^3}{1+x} = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{1+x} =$$

$$= \cdots = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

ASÍ
$$\frac{\frac{1}{x+1} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k}{x^n} = \frac{(-1)^{n+1} x}{1+x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

LUEGO $P_{f',n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$ y $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}}_{R_{n,0}(x)}$

POR EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

$$\ln(x+1) = \int_0^x f'(s)\,ds = \int_0^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^k s^k\,ds + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} s^{n+1}}{1+s}\,ds.$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \int_0^x (-1)^k s^k\,ds + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} s^{n+1}}{1+s}\,ds$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x (-1)^{n+1} \frac{s^{n+1}}{1+s}\,ds.$$

(COMO $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (-1)^{n+1} \frac{s^{n+1}}{1+s}\,ds}{x^n} = 0$ $\quad \frac{\int_0^x \frac{s^{n+1}}{1+s}\,ds}{x^n} \le \frac{\frac{x^{n+2}}{n+2}}{x^n} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$P_{f,n+1,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big).$$

ASÍ LA SERIE DE TAYLOR BUSCADA ES $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}}$

EL RESTO ES $\int_0^x \frac{(-1)^{n+1} s^{n+1}}{1+s}\,ds.$

SI $0 < x < 1$, $\quad |R_{f,n+1,0}(x)| \le \int_0^x \left|\frac{(-1)^{n+1} s^{n+1}}{1+s}\right| ds \underset{1+s>1}{\le} \int_0^x s^{n+1}\,ds =$

$$= \frac{s^{n+2}}{n+2}\Big|_0^x = \frac{x^{n+2}}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (\text{SI } x \in (0,1)).$$

SI $x > 1$ $\quad |R_{f,n+1,0}| \underset{2x > 1+s}{\ge} \frac{1}{2x} \int_0^x s^{n+1}\,ds = \frac{1}{2x} \frac{x^{n+2}}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ $\quad$ (SI $x > 1$)

SI $x = 1$ LA SERIE $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$ ES CONVERGENTE (CRITERIO DE ABEL) y $|R_{f,n+1,0}(1)| = \int_0^1 \frac{s^{n+1}}{1+s}\,ds \le \frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

LUEGO $\boxed{\ln 2 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}}$

DE FORMA ANÁLOGA, LA SERIE DE TAYLOR CONVERGE PARA $x \in (-1,0)$ PERO NO CONVERGE PARA $x = -1$ ¿POR QUÉ?