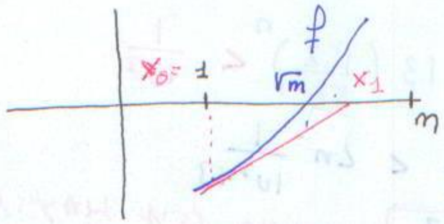
AVR PRÁCTICA-19

Nombre y apellidos..

1.- Sea $m > 1$ y sea $x_0 = 1$. Se considera la sucesión recurrente

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - m}{2x_{n-1}} \qquad \text{para} \qquad \geq 1.$$

1_1.- ¿De dónde puede salir esta igualdad ? CONSIDERAMOS $f(x) = x^2 - m$.



APLICAMOS A f EL MÉTODO DE LAS TANGENTES DE NEWTON ($f'(x) = 2x$) COMENZANDO CON $x_0 = 1$.

1_2.- Prueba que la sucesión está acotada, tanto inferior como superiormente.

VEAMOS QUE $\sqrt{m} \leq x_n \leq m$ PARA $n \geq 1$

PARA $n=1$ ES CIERTO: $\boxed{1 - \frac{1-m}{2} = \frac{1+m}{2} < m}$ Y

TAMBIÉN $x_1 = \frac{1+m}{2} > \sqrt{m}$ (CLARO $\left(\frac{1+m}{2}\right)^2 > m \iff \frac{1+2m+m^2}{4} - \frac{4m}{4} =$

$= \left(\frac{1-m}{2}\right)^2 > 0$.

DE FORMA ANÁLOGA $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - m}{2x_n} = \frac{x_n^2 + m}{2x_n} \geq \sqrt{m} \iff$

$x_n^2 + m \geq 2x_n\sqrt{m} \iff x_n^2 + m - 2x_n\sqrt{m} \geq 0 \iff (x_n - m)^2 \geq 0$.

ASÍ $x_n \geq \sqrt{m}$.

SI $\sqrt{m} \leq x_n \leq m$ (PARA x_1 ES CIERTO) POR INDUCCIÓN

$\boxed{x_{n+1}} = \frac{x_n^2 + m}{2x_m} = \frac{x_n}{2} + \frac{m}{2}\frac{1}{x_n} \leq \frac{m}{2} + \frac{m}{2}\frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{m}{2} + \frac{\sqrt{m}}{2} < m.$

1_3.- Prueba que la sucesión es monótona.

$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{2} + \frac{m}{2}\frac{1}{x_n} - x_n = \frac{m}{2}\frac{1}{x_n} - \frac{x_n}{2} \leq \frac{m}{2}\frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{\sqrt{m}}{2} = 0$

USANDO LA ACOTACIÓN ANTERIOR

LUEGO $x_{n+1} \leq x_n \ \forall n \geq 1$; ASÍ LA SUCESIÓN ES MONÓTONA DECRECIENTE.

1_4.- ¿Es la sucesión convergente? ¿Cúal es su límite?

UNA SUCESIÓN MONÓTONA Y ACOTADA TIENE LÍMITE;

EXISTE $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n x_n = \ell > 0$

AHORA COMO $x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - m}{2x_m}$ TOMANDO LÍMITE:

$$\cancel{\ell} = \cancel{\ell} - \frac{\ell^2 - m}{2\ell} \Rightarrow \ell^2 - m = 0$$

LUEGO $\ell = \sqrt{m}$ | MÉTODO PARA CALCULAR RAÍCES CUADRADAS.

1_5.- Calcula $\sqrt{27}$ con un error menor que $\frac{1}{1000}$.

$f(x) = x^2 - 27$ verifica $f(1) = -26 < 0$, $f(27) > 0$ y $f'(x) = 2x$

$$2 \leq f'(x) \leq 54 \quad \forall x \in [1, 27].$$

Por el teorema de Bolzano $\sqrt{27} \in [1, 27]$

y por el teorema de las tangentes modificado

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{54} \longrightarrow \sqrt{27} \quad \left(\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ n \geq 1 \end{array}\right)$$

de modo que

$$|x_n - \sqrt{27}| \leq \frac{|f(1)|}{2}\left(1 - \frac{2}{54}\right)^n = 13\left(\frac{52}{54}\right)^n < \frac{1}{10^3}$$

Luego $\left(\frac{52}{54}\right)^n < \frac{1}{10^3 \cdot 13} \Rightarrow n \ln\frac{52}{54} < \ln\frac{1}{10^3 \cdot 13}$

Luego $\boxed{n > \dfrac{-[3\ln 10 + \ln 13]}{\ln 52 - \ln 54}}$ veces que hay que repetir el algoritmo

2.- Sea $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \quad : \quad f$ continua $\}$. Sea

$$||f||_1 = \int_a^b |f(t)|dt.$$

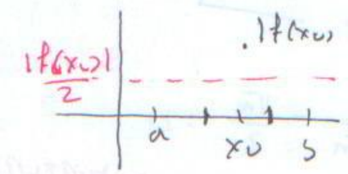
Para todo $f, g \in C[a,b]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ prueba que

2_1.- $||f||_1 = 0$ si y solo si $f = 0$;

Si $f = 0$ es claro que $\int_a^b f\,dt = 0$.

Si $f \neq 0$ $\exists x_0 \in [a,b]$ con $|f(x_0)| > 0$, $|f|$ es continua en x_0 luego existe $\delta > 0$ con $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq [a,b]$ y

$$|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2} \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$



Así $||f||_1 = \int_a^b |f|\,dt \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(t)|\,dt \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{|f(x_0)|}{2}\,dt =$

$= \frac{|f(x_0)|}{2}\, 2\delta > 0$, luego $||f||_1 > 0$.

2_2.- $||\lambda f||_1 = |\lambda| ||f||_1$;

$$||\lambda f||_1 = \int_a^b |\lambda f(t)|\,dt = \int_a^b |\lambda||f(t)|\,dt = |\lambda| \int_a^b |f(t)|\,dt = |\lambda|\, ||f||_1$$

2_3.- $||f + g||_1 \leq ||f||_1 + ||g||_1$. Usando la desigualdad triangular

$$|f+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad \forall x \in [a,b]$$

$$||f+g||_1 = \int_a^b |f(t) + g(t)|\,dt \leq \int_a^b |f(t)| + |g(t)|\,dt =$$

$$= \int_a^b |f(t)|\,dt + \int_a^b |g(t)|\,dt = ||f||_1 + ||g||_1.$$