ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

MÉTODO DE LAS TANGENTE DE NEWTON.

Dada la ecuación $f(x) = 0$, donde f es alguna función "razonable", la solución se encuentra despejando la x, es decir

$$x = f^{-1}(0).$$

El Teorema de la Función Inversa nos dice cuando podemos esperar que exista f^{-1} (si existe f' continua y no se anula). Lo que no nos dice tal Teorema es como calcular f^{-1}.

Un **procedimiento númerico** para aproximar las soluciones de una ecuación del tipo $f(x) = 0$, para f una función razonable (que exista f' no nula) lo da el llamado *Método de las Tangente de Newton*. El siguiente dibujo nos da la idea del método.

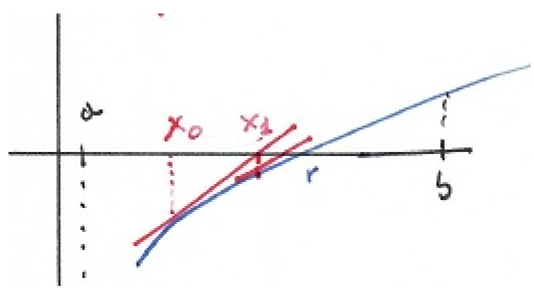

FIGURA 1

Pensemos en una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(a)f(b) < 0$. Así el Teorema de Bolzano nos dice que al menos la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución en el intervalo $[a, b]$. Pedimos algo más, que existe f' continua y que no se anule. Así f es monótona, como la gráfica del dibujo anterior, y la raíz esperada r es única. Ahora

- tomamos $x_0 \in [a, b]$;
- consideramos $r(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ la **recta tangente** a la gráfica de f por el punto $(\,x_0, f(x_0)\,)$;

- consideramos el punto de corte de esta tangente r con el eje de la $''x''$, es decir

$$\left\{ \begin{array}{c} y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ \\ y = 0 \end{array} \right. ;$$

- el punto de corte $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ parece estar "cerca" de la raíz r.

Si el proceso anterior lo iteramos, es decir para $x_0 \in [a, b]$ consideramos la sucesión recurrente

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad \text{para} \qquad n \geq 1$$

¿podemos esperar que la sucesión resultante (x_n) converga a la raiz r, como sugiere el dibujo?

Los siguientes dibujos nos muestran que debemos pedir condiciones adicionales.

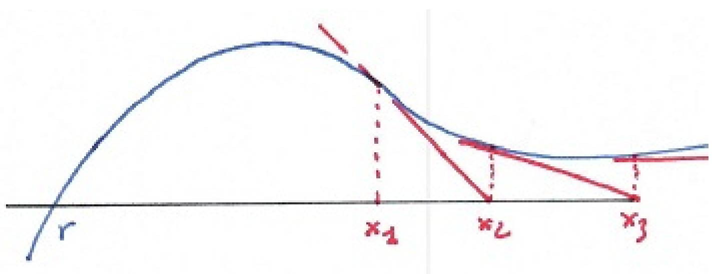

Figura 2

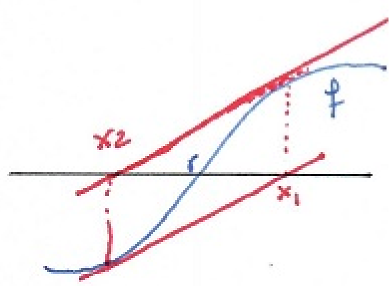

Figura 3

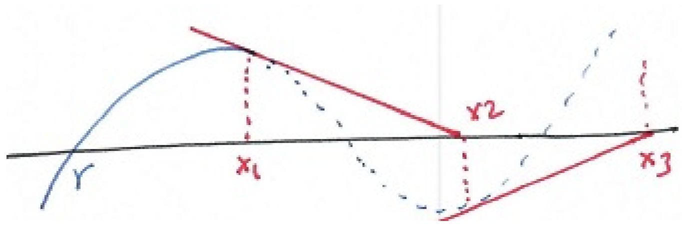

FIGURA 4

Teorema. 1. *(**Método Newton**). Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función derivable con $f(a)f(b)=0$, de modo que existen $m,M>0$ para las cuáles*

$$0<m\leq |f'(x)| \qquad y \qquad |f''(x)|\leq M \qquad para\ todo \qquad x\in[a,b].$$

Sea $r\in[a,b]$, la única raíz de $f(x)=0$ en $[a,b]$. Existe un subintervalo $I\subset[a,b]$, que contiene a r, de modo que para todo $x_0\in I$ la sucesisón recurrente definida por

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad para \qquad n\geq 1,$$

converge a r. En particular,

$$|r-x_{n+1}|\leq\frac{M}{2m}|x_n-r|^2, \qquad para\ cada \qquad n.$$

Demostración: Como $f(a)f(b)<0$, el Teorema de Bolzano nos dice que existe $r\in[a,b]$ raíz de $f(x)=0$.

Como f' es continua (ya que existe f'') y $f'\neq 0$, se sigue que f es monótona, por tanto inyectiva en $[a,b]$. Luego la raíz r es única en el intervalo $[a,b]$.

Llamamos $K=\frac{M}{2m}$. Tomamos $\delta>0$ de modo que

$$\delta<\frac{1}{K} \qquad \text{y tal que} \qquad I=[r-\delta,r+\delta]\subset[a,b].$$

Ahora si tomamos $x_0\in I$, la Fórmula del Resto de Lagrange del Teorema de Taylor nos dice que

$$f(r)=f(x_0)+f'(x_0)(r-x_0)+\frac{1}{2}f''(c)(r-x_0)^2=P_{f,1,x_0}(r)+R_{f,1,x_0}(r),$$

para un c entre x_0 y r. Como $f(r)=0$,

$$-f(x_0)=f'(x_0)(r-x_0)+\frac{1}{2}f''(c)(r-x_0)^2$$

y así

$$-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=(r-x_0)+\frac{f''(c)}{2f'(x_0)}(r-x_0)^2.$$

Si consideramos

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

entonces

$$x_1 = x_0 + (r - x_0) + \frac{f''(c)}{2f'(x_0)}(r - x_0)^2.$$

Así

$$x_1 - r = \frac{f''(c)}{2f'(x_0)}(r - x_0)^2.$$

Tomando valores absolutos y acotando

$$|x_1 - r| = |\frac{f''(c)}{2f'(x_0)}(r - x_0)^2| \leq \frac{M}{2m}\delta^2 < \delta,$$

la última desigualdad la tenemos de que $K = \frac{M}{2m} < 1/\delta$.

Hemos visto que $x_1 \in I = [r - \delta, r + \delta]$. De la misma forma, para cualquier $x' \in I$ se tiene que

$$x' - \frac{f(x')}{f'(x')} \in I.$$

Luego si $x_0 \in I$, la sucesión recurrente $(x_n)_n$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

está dentro del intervalo I. También sabemos que

$$|x_{n+1} - r| = |\frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2|,$$

donde c es un punto entre r y x_n. Luego con la acotación de arriba

$$|x_{n+1} - r| \leq K|x_n - r|^2 \leq$$

de forma recurrrente

$$K\delta|x_n - r| \leq (K\delta)K|x_{n-1} - r|^2 \leq (K\delta)^2|x_{n-1} - r| \leq ....$$

$$...... \leq (K\delta)^n|x_1 - r| \to_{n\to\infty} 0$$

ya que $K\delta < 1$. Lo que prueba que la sucesión $(x_n)_n$ converge a r □

El Teorema anterior nos dice que el proceso de las tangentes de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

puede converger a la raíz buscada. Ahora, para determinar el intervalo I donde tomar el primer término de la sucesión x_0 de arranque, necesitamos conocer r la raíz que buscamos.

Vamos a mejorar el procedimiento para encontar r sin necesidad de "conocerla " previamente. El siguiente Lema nos ayudará en ello.

Lema. 1. *(**Teorema de Punto fijo de Banach**). Sea una función* $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ ***contractiva*** *, es decir que existe* $K \in (0,1)$ *de modo que*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K|x-y|.$$

Entonces existe un único $x^* \in [a,b]$ *de modo que es un* ***punto fijo***

$$\varphi(x^*) = x^*.$$

Además para todo $x_0 \in [a,b]$*, la sucesión recurrente*

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad \textit{para} \qquad n \geq 0$$

converge a x^* *y se tiene que*

$$|x_n - x^*| \leq \frac{K^n}{1-K}|x_0 - x_1|.$$

Obeservemos que si φ es derivable y $|\varphi'(x)| \leq K < 1$, entonces por el Teorema del Valor Medio la función φ es contractiva.

Demostración: Sea $x_0 \in [a,b]$. La sucesión recurrente $(x_n)_n$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad n = 0,1,2,...$$

es de Cauchy. Claro, si $m > n$

$$|x_m - x_n| = |\varphi(x_{m-1}) - \varphi(x_{n-1}| \leq K|x_{m-1} - x_{n-1}| \leq$$

repitiendo el proceso

$$K^2|x_{m-2} - x_{n-2}| \leq ... \leq K^n|x_{m-n} - x_0| \leq$$

usando la propiedad triangular del valor absoluto

$$K^n\left[|x_{m-n} - x_{m-n-1}| + |x_{m-n-1} - x_{m-n-2}| + ... + |x_1 - x_0|\right] \leq$$

usando de nuevo lo de arriba

$$K^n|x_1 - x_0|[K^{m-n-1} + ... + K^2 + K + 1] \leq$$

usando la suma de la serie geometric de razón K

$$K^n|x_1 - x_0|\frac{1}{1-K} \to_{n\to\infty} 0.$$

Como es una sucesión de Cauchy, es convergente. Sea $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$. Tenemos por lado que

$$\begin{array}{rcl} |x_m - x_n| & \leq & K^n|x_1 - x_0|\frac{1}{1-K} \\ \downarrow_{m\to\infty} & & \\ |x^* - x_n| & \leq & K^n|x_1 - x_0|\frac{1}{1-K}. \end{array}$$

Por otro lado, al ser φ continua (lo es por ser contractiva), se tiene que

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \varphi(x_n) \\ \downarrow_{m\to\infty} & & \downarrow_{m\to\infty} \\ x^* & = & \varphi(x^*). \end{array}$$

Por último, que x^* es el único punto fijo se ve fácilmente. Supongamos que existe otro y punto fijo, entonces

$$|x^* - y| = |\varphi(x^*) - \varphi(y)| \leq K|x^* - y|,$$

como $K < 1$, lo anterior solo es posible si $x^* = y$ $\square$

Ahora podemos "mejorar" el método de Newton.

Teorema. 2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable con $f(a)f(b) = 0$, de modo que existen $m, M > 0$ para las cuáles*

$$0 < m < |f'(x)| < M \qquad \textit{para todo} \qquad x \in [a, b].$$

Dado $x_0 \in [a, b]$ la sucesión recurrente $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ definida por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{M} \qquad \textit{para} \qquad n \geq 1,$$

converge a la única raíz $x^* \in [a, b]$ de la ecuación

$$f(x) = 0.$$

En particular,

$$|x^* - x_n| \leq \frac{f(x_0)}{m}(1 - \frac{m}{M})^n.$$

Demostración: Supondremos que $f(a) < 0 < f(b)$, en otro caso se trabaja con $-f$.

Si $f' > 0$, la función es monótona creciente, por tanto inyectiva y solo tiene una **única raíz** en $[a, b]$.

Lo que vamos a hacer es forzar rectas de pendiente M en el método de las tangentes.

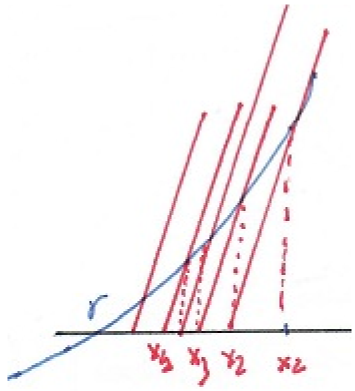

FIGURA 5

Definimos la función

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{M}. \end{array}$$

Observemos que $\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{M}$, luego

$$0 \le \varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{M} \le 1 - \frac{m}{M} = K < 1.$$

Luego, usando el Teorema de Valor Medio, φ es **contractiva**. Además es no decreciente ($\varphi' \ge 0$), luego

$$a < a - \frac{f(a)}{M} = \varphi(a) \le \varphi(x) \le \varphi(b) = b - \frac{f(b)}{M} < b,$$

luego $\varphi(\,[a,b]\,) \subseteq [a,b]$.

Ahora podemos aplicar el Lema anterior y existe un $x^* \in [a,b]$ de modo que

$$x^* = \varphi(x^*) = x^* - \frac{f(x^*)}{M} \qquad \text{lo que implica que} \qquad f(x^*) = 0.$$

Además, para todo $x_0 \in [a,b]$ la sucesión

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{M} \to_{n\to\infty} x^*.$$

Y por último, usando también el Lema anterior,

$$|x_n - x^*| \le \frac{K^n}{1-K}|x_1 - x_0| =$$

como $K = 1 - \frac{m}{M}$ y $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{M}$

$$\frac{|f(x_0)|}{m}(1 - \frac{m}{M})^n \to_{n\to\infty} 0 \qquad \square$$

Ejemplo. 1. *Queremos calcular* $\sqrt{2}$ *con un error menor que* $\frac{1}{10^3}$.

Demostración: Consideramos la función $f(x) = x^2 - 2$. Es una función continua y derivable. Sabemos que $\sqrt{2} \in [1,2]$ es la única raíz de esta función.

Además

- $f(1) = -1 < 0 < 2 = f(2)$.
- $f'(x) = 2x$ y así $0 < 2 = m \leq f'(x) \leq 4 = M$ para todo $x \in [1,2]$.

El Teorema nos dice que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{4} \to_{n\to\infty} \sqrt{2}.$$

Podemos empezar en cualquier punto de $[1,2]$. Tomamos $x_0 = 1$ y sabemos que

$$|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{|f(1)|}{2}(1 - \frac{2}{4})^n = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Luego para $1/2^{9+1} = \frac{1}{1024}$, el término x_9 de nuestra sucesión aproxima $\sqrt{2}$ con el error deseado $\square$

Observemos que las operaciones $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2-2}{4}$ para $x_0 = 1$ solo hacen intervenir número racionales. Lo anterior es por tanto una aproximación racional a un número irracional.

Observación. 1. *¿Cuáles son las ventajas e inconvenientes de ambos Teoremas?*

- *En el segundo método tenemos la seguridad de llegar a la raíz buscada y no es necesario calcular derivadas (solo se usa la cota M).*
- *En cambio, en el primer método la convergencia es más rápida ya que*
$$|x_{n+1} - r| \leq K|x_n - r|^2 \qquad (K = \frac{M}{2m}).$$
Así, si llamamos $e_n = |x_n - r|$, el error cometido al tomar x_n en lugar de r, el siguiente error
$$e_{n+1} \leq K e_n^2$$
se reduce de "forma cuadrática".

Una aplicación de los resultados anteriores es otra prueba del Teorema de la Función Inversa. Este tipo de prueba cobrará más sentido para funciones de varias variables.

Teorema. 3. ***(de la Función Inversa.)*** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de modo que existe f' y es continua. Si $f(a) = b$ y $f'(a) \neq 0$, entonces existe dos intervalos $[a-\delta, a+\delta]$ y $[b-\epsilon, b+\epsilon]$ de modo que*

$$\textit{para todo} \qquad y \in [b-\epsilon, b+\epsilon]$$

*existe un **único***

$$x \in [a-\delta, a+\delta]$$

para el cuál

$$f(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad f^{-1}(y) = x.$$

Además x es el límite de la sucesión recurrente $x_0 = a$ y

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - y}{f'(a)}.$$

Demostración: Elegimos $\delta > 0$ de modo que

$$|f'(x) - f'(a)| \leq \frac{1}{2}|f'(a)|$$

lo cual es posible por ser f' continua y $f'(a) \neq 0$.

Sea $\epsilon = \frac{1}{2}\delta|f'(a)| > 0$. Fijado $y \in [b-\epsilon, b+\epsilon]$, definimos

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x) - y}{f'(a)} \qquad \text{para} \qquad x \in [a-\delta, a+\delta].$$

Veamos las propiedades de φ.

- φ es contractiva.

$$|\varphi'(x)| = |1 - \frac{f'(x)}{f'(a)}| = \frac{|f'(a) - f'(x)|}{|f'(a)|} \leq 1/2 \qquad \text{para todo} \qquad x \in [a-\delta, a+\delta].$$

- $\varphi(\,[a-\delta, a+\delta]\,) \subseteq [a-\delta, a+\delta]$. Ya que

$$|\varphi(x) - a| \leq |\varphi(x) - \varphi(a)| + |\varphi(a) - a| \leq$$

$$1/2|x-a| + \frac{|f(a) - y|}{|f'(a)|} \leq \delta/2 + \frac{\epsilon}{|f'(a)|} \leq \delta/2 + \delta/2 = \delta.$$

Ahora podemos aplicar el Lema de la función contractiva y existe un **único** $x^* \in [a-\delta, a+\delta]$ de modo que

$$x^* = \varphi(x^*) = x^* - \frac{f(x^*) - y}{f'(a)} \qquad \Rightarrow \qquad f(x^*) = y.$$

Además, si $x_0 = a \in [a-\delta, a+\delta]$, la sucesión recurrente

$$\varphi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n) - y}{f'(a)} \to_{n\to\infty} x^* \qquad \square$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es