ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

LA MEJOR APROXIMACIÓN POLINÓMICA.

Lo que vamos a ver es que la mejor aproximación polinómica a una función f por un punto es la que dan sus polinómios de Taylor.

Definición. 1. *Dos funciones f y g se dicen* ***iguales hasta el orden n*** *en un punto a del dominio común si*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Observemos que si $0 \leq i \leq n$ y $|x-a| < 1$, entonces

$$|\frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^i}| \leq |\frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n}|$$

y así para dos funciones f y g iguales hasta el orden n

$$0 = \lim_{x \to a} |\frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n}| = \lim_{x \to a} |\frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^i}|.$$

Con la Definición anterior, ya podemos decir que una función f y su polonimio de Taylor de orden $P_{n,a}$ son iguales hasta el orden n en a.

Teorema. 1. *Sean P y Q dos polinomios en potencias de $(x-a)$ de grado, ambos, menor o igual a n. Supongamos que P y Q son iguales hasta el orden n en a. Entonces son iguales, $P = Q$.*

Demostración: Sea $R(x) = P(x) - Q(x)$, que será un polinomio de orden menor o igual a n. Así

$$R(x) = b_0 + b_1(x-a) + ... + b_n(x-a)^n$$

y

$$\lim_{x \to a} \frac{R(x,y)}{(x-a)^n} = 0.$$

Por la observación anterior,

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{R(x,y)}{(x-a)^{0)}} = b_0,$$

luego $b_0 = 0$. Ahora

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{R(x,y)}{(x-a)} = b_1,$$

luego $b_1 = 0$. Seguimos así y vemos que $R = 0$ que es lo que queremos probar
$\square$

Corolario. 1. *Sea $f : (a-\delta, a+\delta)$ una función n veces derivable y con $f^{n)}$ continua. Sea P un polinomio en potencias de $(x-a)$ de orden menor o igual que n de modo que sea igual a f hasta el orden n en a. Entonces*

$$P(x) = P_{n,a}(x)$$

Demostración: Sea $P_{n,a}$ el polinomio de Taylor de orden n centrado en a de f. Tenemos que

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{P(x) - f(x) + f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} =$$

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Como P y P_n, a son iguales hasta el orden n el Teorema nos dice que son iguales $\square$

Estos resultados nos permiten dar otra definicón del Polinomio de Taylor. $P_{n,a}$ es el único polinomio centrado en a de orden n igual a f hasta el orden n en el punto a.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es