ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

APLICACIONES.

Integrales Impropias y Series En primer lugar daremos un criterio de convergencia de series que tenemos pendiente desde que las estudiamos.

Teorema. 1. *(**Criterio de la Integral.**) Sea $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ una función positiva ($f\geq 0$), decreciente y con*

$$\int_0^\infty f(x)dx < \infty.$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ es convergente.

Demostración: Como la función f es decreciente, recordando la definición de integral, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \int_0^N f(x)dx \leq \int_0^\infty f(x)dx < \infty.$$

Así las sumas parciales de la serie, que son crecientes por ser una serie de términos positivos, están acotadas y por tanto la serie converge.

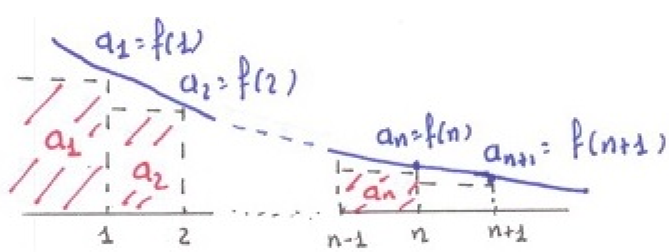

FIGURA 1. Demostración sin palabras.

□

El siguiente resultado nos quedo pendiente al estudiar series.

Ejemplo. 1. $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$, *con $p>1$, es convergente.*

Demostración: Sea la función $f(x) = 1$ si $x \in [0,1]$ y $f(x) = \frac{1}{x^p}$ si $x > 1$. Esta función cumple la hipótesis del Teorema ya que

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = 1 + (\frac{x^{1-p}}{1-p}|_1^\infty = 1 + \frac{1}{p-1}.$$

Luego la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^\infty f(n)$ es convergente $\square$

Ejemplo. 2. *Veamos el carácter de la serie* $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Demostración: La función $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ es claramente decreciente para todo $x > 1$. Además

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \frac{-1}{\ln x}|_2^\infty = \frac{1}{\ln 2}$$

Luego ya es fácil convencerse de que la serie es convergente $\square$

Observación. 1. *La idea de la prueba anterior, invirtiendo los papeles de series e integrales, nos permite dar un criterio de convergencia de integrales si conocemos como se comporta la serie* $\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

Integrales Impropias y Estadística.

Los siguientes conceptos son esenciales en **Estadística.**

Definición. 1. *Una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *positiva* ($f \geq 0$) *y tal que* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = 1$ *se llama* ***función de densidad.***

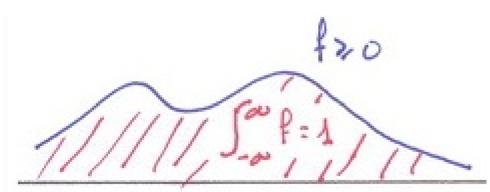

FIGURA 2. Función de densidad.

Definición. 2. *Dada una función de densidad* f *a la función*

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s)ds$$

se le llama función de ***distribución de probabilidad*** *con densidad* f.

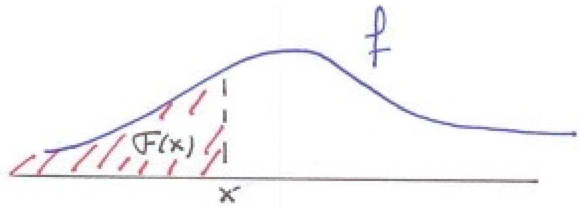

FIGURA 3. Función de distribución.

Observación. 2. *Uno de los problemas más importantes de la* ***Estadística*** *es él de asignar una función de distribución a un fenómeno aleatorio.*

Ante un fenómeno aleatorio, la hora de llegada de un autobús a una parada (no será exacta por el tráfico, el tiempo, el número de pasajeros que suben y bajan...etc), nos gustaría contar con una función de distribución F de modo que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(s)ds$$

nos de la probabilidad de que el fenómeno ocurrar en el intervalo $[a, b]$ (que el autobús llegue en ese rango de tiempo).

Definición. 3. *Dada* $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$ *una función de distribución se llama*

- ***media*** *de la distribución a*
$$E(F) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx;$$
- ***varianza*** *de la distribución a*
$$\tau^2(F) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(F)]^2 f(x)dx.$$

Entender el significado de estas expresiones integrales requiere de un curso más avanzado de Cálculo Integral que está fuera de nuestras posibilidades.

Ejemplo. 3. *Veamos que* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\tau})^2]}$ *es una función de densidad.*

Demostración: Usaremos que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, aunque para probarlo se requiere de un curso más avanzado de Cálculo Integral que está fuera de nuestras posibilidades. Así lo que tenemos que ver es que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\tau})^2]} dx = 1$$

Veámoslo.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\tau})^2]} dx$$

el cambio de variable $t = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\tau}$ con $dt = \frac{1}{\sqrt{2}\tau}$, donde además los límites de integración no cambian, nos da

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 1$$

donde hemos utilizado que la función e^{-t^2} es par $\square$

Ejemplo. 4. *Si F es la función de distribución de la función de densidad f del ejemplo anterior, entonces $E(F) = \mu$.*

Demostración: Usando la definición de arriba

$$E(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\tau})^2]} dx$$

haciendo el cambio de variable $t = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\tau}$ y así $x = \sqrt{2}\tau t + \mu$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\tau t + \mu}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{2}\tau}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt = \mu$$

ya que la segunda integral vale 1 y la primera vale cero por ser la función te^{-t^2} impar $\square$

Definición. 4. *A la función de distribución*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{[-\frac{1}{2}(\frac{s-\mu}{\tau})^2]} ds$$

*se le llama **distribución normal** de **media** $\mu = E(F)$ y **varianza** $\tau^2 = \tau^2(F)$ (comprobar).*

Observación. 3. *Muchos procesos aleatorios se **ajustan** (es decir se les asigna) por una distribución de probabilidad **normal**. Se calculan μ y τ^2 la media y varianza **muestrales** (es decir se toman datos y se calcula la media y varianza como enseñan en el cole) del proceso en cuestión y se ajusta su probabilidad por*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{[-\frac{1}{2}(\frac{s-\mu}{\tau})^2]} ds.$$

Se puede probar que si un proceso viene dado por una distribución normal de media μ y varianza τ^2, entonces hay al menos un 95 % de probabilidad de que el fenómeno ocurra en el intervalo $[\mu - 3\tau, \mu + 3\tau]$.

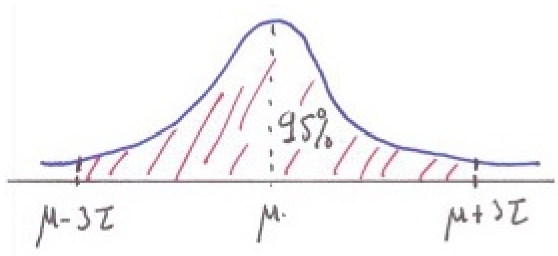

Figura 4. Probabilidad y desviación de la media.

Definición. 5. *Para cada $x > 0$ se define la función* ***Gamma de Euler*** *por*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Veamos propiedades de la función Gamma de Euler.

1. Está bien definida. **Demostración:**

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

Ahora si $x \geq 1$ se tiene $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt < \infty$ ya que $e^{-t} t^{x-1}$ es continua.

Si $x \in (0,1)$, entonces como $1/e \leq e^{-t} \leq 1$

$$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^{1-x}} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dt < \infty.$$

Nos acupamos ahora de la segunda integral. Fijado $x > 0$ tomamos $n \in \mathbb{N}$ de modo que $x - 1 \leq n$ y así

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{1-x} dt \leq \int_1^\infty e^{-t} t^n dt$$

aplicando la Regla de Integración por Partes

$$= -e^{-t} t^n |_1^\infty + n \int_1^\infty e^{-t} t^{n-1} dt = \frac{1}{e} + n \int_1^\infty e^{-t} t^{n-1} dt$$

aplicando $n-1$-veces más La Regla de Integración por Partes

$$\frac{1}{e} + n\frac{1}{e} + (n-1)\frac{1}{e} + ... + n! \int_1^\infty e^{-t} dt < \infty$$

□

2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. **Demostración:**

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x+1-1} dt$$

aplicando la Regla de Integración por Partes

$$= -e^{-t} t^x |_0^\infty + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = 0 + x\Gamma(x)$$

□

3. $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}dt = -e^{-t}|_0^{\infty} = 1$ De lo que se deduce que

$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = ... = (n-1)!\Gamma(1) = (n-1)!$

4. $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}du$ (Ejercicio).

Definición. 6. *Se define la función*

$$f(x,\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, & si \quad x > 0 \\ 0, & si \quad 0 < x. \end{cases}$$

La función

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t,\alpha,\beta)dt$$

*es la función de distribución **Gamma** de parámetros α y β.*

Si $\alpha = \frac{n}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}$ a F se le llama χ^2 (ji-cuadrado) con n-grados de libertad.

Observación. 4. *La función χ^2 (ji-cuadrado) es muy útil en **inferencia estadística.***

La Transformada de Laplace. Dada una función $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ la vamos a transformar en otra función con propiedades interesantes.

Definición. 7. *Dada una función $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ se define su **transformada de Laplace** por la función*

$$Lf(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx$$

con

$$DomLf = \{\, s \in (0,\infty) \ : \ \text{la integral impropia } Lf(s) \text{ exista}\}.$$

Ejemplo. 5. *Si $f(x) = x$ vamos a calcular su transformada de Laplace.*

Demostración:

$$Lf(s) = \int_0^{\infty} xe^{-sx}dx$$

integrando por Partes

$$\frac{-1}{s}xe^{-sx}|_0^{\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-sx}dx = \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-sx}dx$$
$$= \frac{-1}{s^2}e^{-sx}|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}$$

□

La propiedad más importante de la Transformada de Laplace es la siguiente.

Proposición. 1. *Si* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *es una función derivable y* $\lim_{x\to\infty} e^{-sx} f(x) = 0$ *para todo* $s > 0$, *entonces*

$$Lf'(s) = sLf(s) - f(0)$$

Demostración:

$$Lf'(s) = \int_0^\infty f'(x) e^{-sx} dx$$

integrando por partes

$$= f(x)e^{-sx}|_0^\infty - s\int_0^\infty f(x)e^{-sx} dx$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{-sx} f(x) - f(0) - s\int_0^\infty f(x)e^{-sx} dx = sLf(s) - f(0)$$

□

Observación. 5. *Los problemas de circuitos eléctricos tienen una expresión matemática en términos de* ***ecuaciones diferenciales lineales*** *(lo cuál se ve en cursos superiores). Usando la Transformada de Laplace las ecuaciones diferenciales lineales se transforman en ecuaciones algebraicas lineales que se resuelven como se enseña en un curso de Álgebra Lineal.*

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es