ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA PARA FUNCIONES NO POSITIVAS.

Como en el caso de las series, existen funciones que en valor absoluto tienen integrales impropias no convergentes; sin embargo la integral impropia de la función existe. Ya hemos visto algún ejemplo y alguno más veremos a continuación. Es por esto que necesitamos **Criterios de Convergencia para Funciones No Positivas**.

Teorema. 1. ***(Criterio de las Series)*** *Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ con $b \in \mathbb{R}$ o bien $b = \infty$. Entonces:*

- **A):** *La integral $\int_a^b f(t)dt$ es convergente si y solo si para toda sucesión $(x_n) \to_{n\to\infty} b$ la serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$$
es convergente.
- **B):** *Si f es positiva, entonces la integral $\int_a^b f(t)dt$ es convergente si y solo si para toda sucesión creciente $(x_n) \uparrow_{n\to\infty} b$ la serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt < \infty.$$

Demostración: A) Sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b)$. F es continua. Por tanto
$$\int_a^b f(t)dt \qquad \text{existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{existe} \qquad \lim_{x\to b^-} F(x);$$
este límite existe si y solo si para toda sucesión $(x_n) \to_{n\to\infty} b$ existe (y son iguales) el límite
$$\lim_{n\to\infty} F(x_n).$$
Ahora, tomando $x_0 = a$,
$$F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t)dt = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t)dt.$$

Así, son equivalentes

- existe $\int_a^b f(t)dt$;
- existe $\lim_{n\to\infty} F(x_n)$;
- la serie $\sum_{j=0}^{\infty}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ es convergente.

B) Es un caso particular del anterior. Ejercicio $\square$

Ejemplo. 1. *La integral* $\int_\pi^\infty |\frac{\operatorname{sen} x}{x}|dx$ *no es convergente. La función* $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ *no es absolutamente integrable en* $[\pi,\infty)$. *Después veremos que si es integrable.*

Demostración: La función $f(x) = |\frac{\operatorname{sen} x}{x}|$ es positiva.

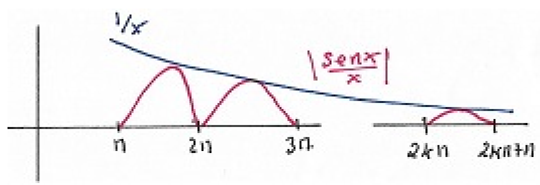

FIGURA 1

Además, como $f''(x) = \frac{1}{x^3}(-x^2 \operatorname{sen} x - 2x\cos x + 2\operatorname{sen} x) \leq 0$ si $x \in [2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ k=1,2,3....., f es concava en tales intervalos (así la gráfica de la función queda por encima de la cuerda).

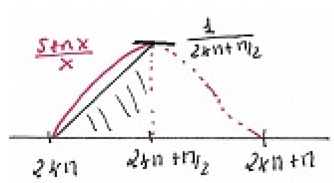

FIGURA 2

Por tanto se tiene que

$$\int_\pi^\infty f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} f(t)dt \geq$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2j\pi}^{2j\pi+\frac{\pi}{2}} f(t)dt \geq \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\pi}{2}\frac{1}{2j\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}.$$

La última serie es divergente (es comparable a la serie armónica), por lo tanto la integral no converge $\square$

Para dar el siguiente criterio necesitamos un lema previo.

Lema. 1. *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $b \in \mathbb{R}$, funciones de modo que f es integrable (Riemann) en $[a, b]$, g positiva y decreciente y tales que fg es integrable (Riemann) en $[a, b]$. Entonces existe $c \in [a, b]$ de modo que*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a)\int_a^{c} f(t)dt$$

Dejamos la prueba para el final del artículo.

Teorema. 2. *(**Criterio de Dirichlet**) Sean $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ con $b \in \mathbb{R}$ o bien $b = \infty$, funciones de modo que:*

- *existe $M > 0$ para el cuál*
$$|\int_a^x f(t)dt| \leq M$$
para todo $x \in [a, b)$;
- *existe $\int_a^x f(t)g(t)dt$ para todo $x \in [a, b)$;*
- *g es una función monótona y $\lim_{t\to b} g(t) = 0$.*

Entonces existe la integral impropia

$$\int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Demostración: Vamos a usar el Criterio de Cauchy junto al Lema anterior. En primer lugar, para $x_1, x_2 \in [a, b)$ se tiene que

$$|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt| = |\int_a^{x_1} f(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt - \int_a^{x_1} f(t)dt| \leq$$
$$|\int_a^{x_2} f(t)dt| + |\int_a^{x_1} f(t)dt| \leq 2M.$$

Supondremos que g es decreciente y por tanto positiva. En otro caso tomamos $-g$ y probamos que existe la integral impropia de $f(-g)$ y así también la de fg.

Dado $\epsilon > 0$ existe un x_0 de modo si $x_0 < x < b$, entonces $|g(x)| \leq \frac{\epsilon}{2M}$. Por otro lado, para

$$x_0 < x_1 < x_2 < b$$
$$|\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t)dt| =$$

aplicando el lema para algún $c \in [x_1, x_2]$

$$|g(x_1)\int_{x_1}^{c} f(t)dt| = |g(x_1)||\int_{x_1}^{c} f(t)dt| \leq \frac{\epsilon}{2M}2M = \epsilon.$$

Ahora el Criterio de Cauchy nos dice que existe la integral impropia $\int_a^b f(t)g(t)dt$

□

Ejemplo. 2. *Existe la integral impropia* $\int_\pi^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$.

Demostración: Por un lado $\operatorname{sen} x$ es continua y por tanto existe la integral de la función en $[\pi, s]$ para todo $s > \pi$. Además si $s \in [2K\pi, 2(K+1)\pi]$ se sigue que

$$|\int_\pi^s \operatorname{sen} x dx| = |\int_{2K\pi}^s \operatorname{sen} x dx| \leq |\int_{2K\pi}^{2K\pi+\pi} \operatorname{sen} x dx| = |\int_{2\pi}^{3\pi+\pi} \operatorname{sen} x dx|.$$

Además la función $\frac{1}{x}$ es decreciente y $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Ahora el Criterio de Dirichlet nos dice que

$$\int_\pi^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

existe $\square$

Teorema. 3. ***(Criterio de Abel)*** *Sean* $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ *con* $b \in \mathbb{R}$ *o bien* $b = \infty$, *funciones que verifican que*

- *existe la integral impropia* $\int_a^b f(t)dt$;
- *existe* $\int_a^x f(t)g(t)dt$ *para todo* $x \in [a, b)$;
- g *es monótona y acotada.*

Entonces existe la integral impropia

$$\int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Demostración: Puesto que existe $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt$, existe $M > 0$ de modo que

$$|\int_a^x f(t)dt| \leq M$$

para todo $x \in [a, b)$.

Por otro lado, por ser g monótona y acotada, existe

$$\lim_{t\to b^-} g(t) = l.$$

Sea $h(t) = g(t) - l$. Es monótona y $\lim_{t\to b^-} h(t) = 0$. Por el Criterio de Dirichlet existe

$$\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)h(t)dt = \lim_{x\to b} \left(\int_a^x f(t)g(t)dt - l \int_a^x f(t)dt \right).$$

Puesto que existe el primer límite y la función f tiene integral impropia se sigue que existe

$$\int_a^b f(t)g(t)dt \qquad \square$$

Observación. 1. *El producto de una función integrable Riemann con una función monótona siempre es integrable (ver Apéndice Criterio de Integrabilidad de Lebesgue). Por ello, en los tres últimos resultados prodríamos prencindir de la hipótesis de que exista* $\int_a^x f(t)g(t)dt$ *para todo* $x \in [a,b)$.

Demostración: (del **Lema**) Puesto que f es integrable, la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es continua en $[a,b]$. Por tanto F alcanza su mínimo y su máximo en el intervalo $[a,b]$. Sean

$$r \qquad \text{de modo que} \qquad F(r) = m = \min\{F(x) \ : \ x \in [a,b]\,\}$$

y

$$s \qquad \text{de modo que} \qquad F(s) = M = \max\{F(x) \ : \ x \in [a,b]\,\}.$$

Vamos a probar que

$$g(a)m \le \int_a^b f(t)g(t)dt \le g(a)M \qquad\qquad (*).$$

Visto esto, por el Teorema de Bolzano, existe $c \in [a,b]$ de modo que

$$g(a)F(c) = g(a)\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Para probar $(*)$ procederemos en tres pasos.

Primero. Sea $P = \{x_0 = a < x_1 < .... < x_n = a\} \in P([a,b])$ una partición del intevalo $[a,b]$. Definimos

$$\rho(P) = \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt = \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})(\,F(x_i) - F(x_{i-1})\,) =$$

$$-g(x_0)F(x_0) + (\,g(x_0) - g(x_1)\,)F(x_1) + (\,g(x_1) - g(x_2)\,)F(x_2) + ...$$

$$... + (\,g(x_{n-2}) - g(x_{n-1})\,)F(x_{n-1}) + g(x_{n-1})F(x_n).$$

Ahora, como

- $F(x_0) = F(a) = 0$,
- g es positiva, luego $g(x_{n-1}) \ge 0$,
- g es creciente, luego $(\,g(x_{i-1}) - g(x_i) \ge 0$ para todo $i = 1, 2, ..., n-1$,
- y $m \le F(x) \le M$ para todo $x \in [a,m]$,

se sigue que (sustituyendo $F(x_i)$ por m o M, se cancelan términos)

$$mg(a) \le \rho(P) \le Mg(a).$$

Segundo. Si $mg(a) = \int_a^b f(t)g(t)dt$ o $Mg(a) = \int_a^b f(t)g(t)dt$, no hay nada más que probar. Supongamos que

$$\text{mín}\{\ |mg(a) - \int_a^b f(t)g(t)dt|,\ |Mg(a) - \int_a^b f(t)g(t)dt|\ \} > 0.$$

Vamos a probar que para todo $\epsilon > 0$ existe una partición $P \in P([a,b])$ de modo que

$$|\int_a^b f(t)g(t)dt - \rho(P)| < \epsilon.$$

Claro, por ser f integrable, f está acotada. Sea $K > 0$ con

$$|f(t)| \leq K \qquad \text{para todo} \qquad t \in [a,b].$$

Dado $\epsilon > 0$ existe una partición

$$P = \{x_0 = a < x_1 < .... < x_n = a\} \in P([a,b]),$$

de modo que

$$x_i - x_{i-1} \leq \frac{\epsilon}{K(\,g(a) - g(b)\,)} \qquad \text{para todo} \qquad i = 1,2,...,n.$$

Para esta P tenemos que

$$|\int_a^b f(t)g(t)dt - \rho(P)| =$$

$$|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)dt - \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt| \leq$$

$$\sum_{i=1}^n |\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)(\,g(t) - g(x_{i-1})\,)dt| \leq$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|\,|(\,g(t) - g(x_{i-1})\,)|dt \leq$$

por ser g decreciente y f acotada

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} K\,(\,g(x_{i-1}) - g(x_i)\,)dt \leq$$

$$\sum_{i=1}^n K \frac{\epsilon}{K(\,g(a) - g(b)\,)} (\,g(x_{i-1}) - g(x_i)\,) = \epsilon.$$

Tercero. Para terminar, y probar $(*)$, no puede ocurrir que

$$mg(a) - \int_a^b f(t)g(t)dt = \delta > 0$$

o que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt - Mg(a) = \delta > 0,$$

ya que para $\epsilon = \delta/2$ existiría P partición con

$$|\int_a^b f(t)g(t)dt - \rho(P)| \leq \delta/2,$$

lo cuál no es compatible con

$$mg(a) \leq \rho(P) \leq Mg(a) \qquad \square$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es