INTEGRALES IMPROPIAS II.

1.- Sean $f, g(-\infty, 7] \to [0, \infty)$ dos funciones continuas de modo que $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$, entonces:

a) si existe $\int_{-\infty}^{7} g(t)dt$ implica que existe $\int_{-\infty}^{7} f(t)dt$,

b) existe $\int_{-\infty}^{7} t(t)dt$ si y solo si existe $\int_{-\infty}^{7} g(t)dt$,

c) si $\int_{-\infty}^{7} f(t)dt$ diverge, entonces $\int_{-\infty}^{7} g(t)dt$ es divergente,

d si existe $\int_{-\infty}^{7} f(t)dt$ implica que existe $\int_{-\infty}^{7} g(t)dt$.

2.- Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua en $[0, \infty)$ y tal que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)x^2}{1 + \operatorname{sen}^2 x} = 0$. ¿Existe $\int_0^\infty f(x)dx$?

3.- Encuentra un ejemplo de una función f uniformemente continua en $[1, \infty)$ de modo que exista $\int_1^\infty f(t)dt$. Justifica tu respuesta.

4.- Comprueba que $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-k}$ es divergente y que $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-n}$ es convergente.

5.- Calcula el volumen de la esfera de radio r.

6.- Si $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, entonces $\int_0^\infty e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} dx =$

a) $\sqrt{\pi}$ b) $\sqrt{2\pi}$ c) $2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ d) π

7.- Halla el área de los recintos del plano limitados por:

a) $x^2 + y^2 = 2$ y $2y = 3 - x^2$

b) $y = xe^{-x}$ e $y = x^2 e^{-x}$

c) $f(x) = x(x - 2)$ y $g(x) = x/2$ para $x \in [0, 2]$.

d) Entre la curva $y^2 = \frac{1-x}{1+x}$ y su asíntota $x = -1$.

e) El área de $A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -3x \le y \le -x^2 + 3x \,\}$.

8.- Demuestra que las áreas comprendidas entre el eje x y los ondas de la curva $y = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$, para constantes $\alpha, \beta > 0$, forman una progresión geométrica. Halla su razón.

9.- Sea $C = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = t^3 + 1, \ \ y = 1 + \operatorname{sen} t, \ \ t > 0 \,\}$.

a) Representa la curva plana C.

b) Calcula el área delimitada entre la curva y el segmento $[1, 9]$ del eje de las $''x''$.

10.- Halla el área encerrada por un lazo de *cicloide* $x = a(t - \operatorname{sen} t)$; $y = a(1 - cost)$, para una constante $a > 0$. (**Teorema de Galileo**).

11.- Halla el área limitada por el bucle del *folium de Descartes* $x^3 + y^3 = axy$, $a > 0$ (**utiliza:** $y = tx$, para hallar una parametrización de la curva).

12.- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, derivable con f' continua. Se define la longitud de la curva

$$C = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [a, b] \}$$

por

$$\alpha_C = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

a) Encuentra alguna justificación para esta definición.

b) Calcula la longitud de la circunferencia de radio r.

c) Halla la longitud de un arco de *catenaria* $y = a \cosh \frac{x}{a}$, con $a > 0$ constante.

d) Calcula la longitud de las gráficas de las funciones:

1) $f(x) = \sqrt{2x}, \quad x \in [1, 3]$ 2) $f(x) = \ln(\cos x), \quad x \in [0, \pi/4]$.

13.- Se coloca un hilo de 5m a lo largo de la curva $y = \ln(\cos x)$, x, y dados en metros, a partir del origen de coordenadas. Calcula las coordenadas del extremo del hilo.

14.- Calcula el volumen del sólido que se produce al girar un arco de *catenaria* $y = a \cos(x/a)$ alrededor de su base (eje de las $''x''$).

15.- Calcula los volúmenes de los cuerpos engendrados por rotación en torno al eje $0X$ de las gráficas:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x, \ x \in [0, \pi]$ b) $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}, \ x \in [0, 1]$ c) $f(x) = e^{-x}, \ x \in [0, a]$.

16.- Calcula el volumen del sólido de revolución que se produce al girar la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{1+|x|}, \ x \in [-1, 1]$, respecto del eje de ordenadas ($x = 0$).

17.- La columna representada en el dibujo tiene secciones circulares. Si está hecha con un material uniforme de densidad $\rho = 10gr/cm^3$ ¿Cuánto pesa la columna?