APROXIMACIÓN POR FUNCIONES

PROBLEMA 1: a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2 =$

$$= (x+4-4)^3 - 2(x+4-4)^2 - 5(x+4-4) - 2 =$$

$$= (x+4)^3 - 12(x+4)^2 + 48(x+4) - 64$$
$$- 2(x+4)^2 + 16(x+4) - 32$$
$$- 5(x+4) + 20$$
$$- 2 =$$

$$= (x+4)^3 - 14(x+4)^2 + 59(x+4) - 78$$

b) $f(x) = \ln x \qquad f'(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$$

$f^{k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k} \qquad f^{k)}(1) = (-1)^{k+1}(k-1)!$

c) $f(x) = \frac{1}{x} \qquad \ln' x = \frac{1}{x}$, ASÍ PUES

SE PUEDE HACER

$$\frac{1}{x} = (\ln' x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k \right)' = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$$

↓ DERIVANDO TÉRMINO A TÉRMINO (VER SERIES DE POTENCIAS).

O TAMBIÉN

$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f(1) = 1$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f'(1) = -1$

$f''(x) = +\frac{2}{x^3} \qquad f''(1) = 2$

$f'''(x) = \frac{-3!}{x^4} \qquad f'''(1) = 6$

$f^{k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} \qquad f^{k)}(1) = (-1)^k k!$

LUEGO $\frac{1}{x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$

PROBLEMA 1:

APROX. POR FUNCIONES

d) $f(x) = 1/x^2$ $\quad f(-1) = 1$

$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

$f''(x) = \frac{3!}{x^4}$

$\vdots$

$f^{k)}(x) = \frac{(-1)^k (k+1)!}{x^{k+2}}$ $\quad f^{k)}(-1) = \frac{(-1)^k (k+1)!}{(-1)^k} = (k+1)!$

luego $f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(x+1)^k$

e) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f(1) = 2$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2}$

$f'''(x) = \frac{3}{2^3} x^{-5/2}$

$f^{IV)}(x) = -\frac{3 \cdot 5}{2^4} x^{-7/2}$

$\vdots$

$f^{k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{3 \cdot 5 \cdots (2(k-2)+1)}{2^k} x^{-\frac{2k-1}{2}}$

$$\sqrt{x} = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 3 \cdot 5 \cdots (2(k-2)+1)}{k!\, 2^k} (x-1)^k$$

f) $f(x) = \cos x$ $\quad f(\pi/2) = 0$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x$ $\quad f'(\pi/2) = -1$

$f''(x) = -\cos x$ $\quad f''(\pi/2) = 0$

$f'''(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad f'''(\pi/2) = 1$

$f^{IV)}(x) = \cos x$

etc

$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} (x - \frac{\pi}{2})^{2k+1}$

APROX POR FUNCIONES.

PROBLEMA 2: a) Como $(f+g)^{k}(a) = f^{k)}(a) + g^{k)}(a)$

$$P_{f+g,k,a}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)(x-a)^k.$$

b) $f\cdot g(a) = f(a)g(a)$

$$(f\cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

$$(f\cdot g)''(a) = f''(a)g(a) + f'(a)g'(a) + f'(a)g'(a) + g''(a)f(a) =$$

$$= f''(a)g(a) + 2f'\cdot g'(a) + g''(a)f(a)$$

$$(f\cdot g)'''(a) = f'''(a)g(a) + f''(a)g'(a) + 2f''(a)g'(a)$$

$$+ 2f'(a)g''(a) + f'(a)g''(a) + f(a)g'''(a) =$$

$$= f'''(a)g(a) + 3f''(a)g'(a) + 3f'(a)g''(a) + g'''(a)f(a) =$$

$$= \sum_{j=0}^{3} \binom{3}{j} f^{3-j)}(a)\, g^{j)}(a)$$

SUPONGAMOS QUE $(f\cdot g)^{k}(a) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{k-j)}(a)\, g^{j)}(a)$

ASÍ $(f\cdot g)^{k+1}(a) = \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{k-j)}(a)\, g^{j)}(a) \right)' =$

$$= \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left[f^{k-j)}(a)\, g^{j)}(a) \right]' \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{k-j+1)}(a)\, g^{j)}(a) + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{k-j)}(a)\, g^{j+1)}(a)$$

$$= f^{k+1)}(a)g(a) + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} f^{k-j+1)}(a)\, g^{j)}(a) + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} f^{k-j)}(a)\, g^{j+1)}(a) + f(a)g^{k+1)}(a) =$$

$$= f^{k+1)}(a)g(a) + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} f^{(k+1)-j)}(a)\, g^{j)}(a) + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j-1} f^{(k+1)-j)}(a)\, g^{j)}(a) + f(a)g^{k+1)}(a) =$$

$$= f^{k+1)}(a)g(a) + \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\left(\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} \right)}_{\binom{k+1}{j}} f^{k+1-j)}(a)\, g^{j)}(a) + f(a)g^{k+1)}(a) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} f^{k+1-j)}(a)\, g^{j)}(a),$$ que a lo que queríamos llegar.

APROX. POR FUNCIONES.

PROBLEMA 2: b) CONTINUACIÓN

$$P_{f\cdot g,n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\sum_{j=0}^{k} f^{k-j)}(a)\, g^{j)}(a) \binom{k}{j}\right)(x-a)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{k!}\frac{k!}{(k-j)!\,j!} f^{k-j)}(a)\, g^{j)}(a)\right)(x-a)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k} a_{k-j}\, b_j\right)(x-a)^k.$$

c)

$$P_{f',n,a} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k+1)}(a)(k+1)}{(k+1)!}(x-a)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (k+1)\, a_{k+1}\, (x-a)^k$$

d) $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$F(a) = 0$

$F'(x) = f(x)$ y así $F'(a) = f(a)$

$\vdots$

$F^{k)}(a) = f^{k-1)}(a)$

LUEGO

$$P_{F,n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{k-1)}(a)}{k!}(x-a)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{k)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\cdot a_k\,(x-a)^{k+1}.$$

e)

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt =$$

(APARTADO d))

$$= \int_0^a f(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\, a_k\,(x-a)^{k+1}.$$

APROX POR FUNCIONES

PROBLEMA 3:

$f: [a-\delta, a+\delta] \to \mathbb{R}$.

$$P_{2,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

$$P_{2,a}(a) = f(a)$$

y $P_{2,a}'(a) = f'(a)$ por.

LUEGO LA RECTA TANGENTE A f y A $P_{2,a}$ EN $x=a$ ES LA MISMA (¿ES CIERTA?)

b) $f(x) = P_{2,a}(x)$ SI Y SOLO SI f ES UN POLINOMIO

c) $P^{3)}_{2,a}(x) \equiv 0$ ¿$f^{3)}(x) \equiv 0$? NO TIENE POR QUÉ

d) $\lim_{a\to\infty} f(x) - P_{2,a}(x) = \lim_{a\to\infty} f(x) - f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$

SI $f''(a) \neq 0$, EL LIMITE ANTERIOR NO VA A CERO)

PROBLEMA 4:

a) $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + 1/2 + 1/6 + \dots > 2$

(VIMOS QUE $e = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$)

POR OTRO LADO $k! \geq 2^k$ PARA $k > 4$ (INDUCCIÓN)

ASÍ $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2^4}}{1-1/2} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

SERIE GEOMÉTRICA

AHORA $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{12}{24} + \frac{4}{24} + \frac{2}{24} = \frac{18}{24} > \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}$

LUEGO $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq 2 + \frac{18}{24} = \frac{66}{24} < 3$

b) $e^x = P_{n,0}(x) + R_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} + R_{n,0}(x)$

EN PARTICULAR

$$e^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} + R_{n,0}(1)$$

APROX. POR FUNCIONES

PROBLEMA 4: b) CONTINUACIÓN

POR LA FORMA DEL RESTO DE LAGRANGE

$$R_{n,0}(1) = \frac{e^t}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} \quad \text{PARA } t \in [0,1]$$

LUEGO $R_{n,0}(1) \leq \frac{3}{(n+1)!}$

↓

$e^t \leq e \leq 3$

SI e ES RACIONAL $e = p/q$ $p, q \in \mathbb{N}$ IRREDUCIBLES

ASÍ $\frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \quad + \frac{1}{n!} + R_{n,0}(1)$

LUEGO $n!\frac{p}{q} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \dots + 1 + n!\,R_{n,0}(1)$

PODEMOS TOMAR $n > q$, ENTONCES

$$n!\,R_{n,0}(1) = n!\frac{p}{q} - n! - n! - \frac{n!}{2!} - \quad - 1 \in \mathbb{Z}$$

POR OTRO LADO $0 < R_{n,1}(0) < \frac{3}{(n+1)!}$ /

Y $0 < n!\,R_{n,1}(0) < n!\frac{3}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

LUEGO $n!\,R_{n,1}(0)$ NO PUEDE SER ENTERO PARA n GRANDES.

PROBLEMA 5: $f'' + f = 0$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$.

DERIVANDO $f''' + f' = 0 \Rightarrow f'''(0) = 0$. REPITIENDO EL PROCESO $f^{4)}(0) = 0$ PARA TODO $k \in \mathbb{N}$.

POR OTRO LADO SEA $f^2 + (f')^2 = g \geq 0$. FUNCIÓN POSITIVA Y DERIVABLE.

$g'(x) = 2ff' + 2f'f'' = 2f'[f + f''] = 0$

ASÍ $g \equiv ct$. COMO $f(0) = f'(0) = 0$, $g(0) = 0$ Y POR SER CONSTANTE ES NULA. ASÍ $f^2 + (f')^2 \equiv 0$ COMO $f^2, f'^2 \geq 0$ SE SIGUE QUE $f \equiv 0$.

APROX POR FUNCIONES

PROBLEMA 6: $g(x) - g(a) = \int_a^x g'(t)\,dt$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

ASÍ $|g(x)| = |g(x) - g(a)| = \left|\int_a^x g'(t)\,dt\right| \le$

$g(a)=0$

$\le \int_a^x |g'(t)|\,dt \le \int_a^x M|t-a|^n\,dt =$ INTEGRANDO

$|x-a| < \delta$

$= M\left(\frac{|t-a|^{n+1}}{n+1}\Big|_a^x\right) = M\frac{|x-a|^{n+1}}{n+1}$ SI $|x-a|<\delta$.

PROBLEMA 7: a) SI $\lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{(x-a)^n} = 0$

POR DEFINICIÓN DE LÍMITE, PARA $\varepsilon > 0$ EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE $0<|x-a|<\delta$, ENTONCES

$\left|\frac{g'(x)}{(x-a)^n}\right| < \varepsilon \Rightarrow |g'(x)| < \varepsilon|x-a|^n.$ SI $|x-a|<\delta$.

POR EL PROBLEMA ANTERIOR

$|g(x)| \le \varepsilon\frac{|x-a|^{n+1}}{n+1}$ SI $|x-a|<\delta$

LUEGO $\left|\frac{g(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| < \frac{\varepsilon}{n+1}$ PARA $|x-a|<\delta$

LUEGO, POR DEFINICIÓN DE LÍMITE,

$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0$

b) SI $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, $g(a)=0$

$g'(x) = f'(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} =$

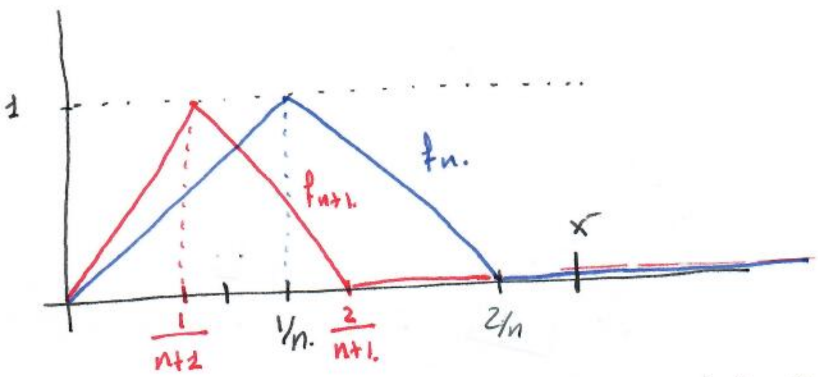
$= f'(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(f')^{k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} =$

$= f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(f')^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f'(x) - P_{f',n-1,a}.$

APROX. POR FUNCIONES

PROBLEMA 8: b) $f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{SI } 0 \le x \le 1/n \\ 2-nx & \text{SI } 1/n \le x \le \frac{2}{n} \\ 0 & \text{SI } 2/n < x \le 1 \end{cases}$

EMPEZAMOS DIBUJANDO LA GRÁFICA DE f_n, f_{n+1}.



PARA $x=0$, $f_n(0)=0$ PARA TODO n, LUEGO

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0)=0$$

PARA $x>0$, EXISTE n_0 TAL QUE $\frac{2}{n_0} < x$, Y

LUEGO PARA TODO $n \geq n_0$, $\frac{2}{n} \le \frac{2}{n_0} < x$

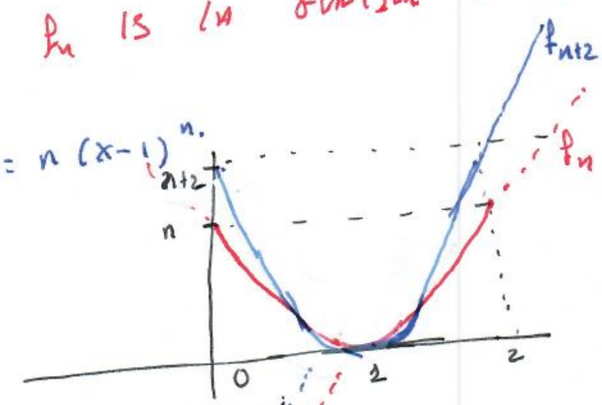
ASÍ $f_n(x)=0 \quad \forall n \geq n_0$

POR TANTO $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

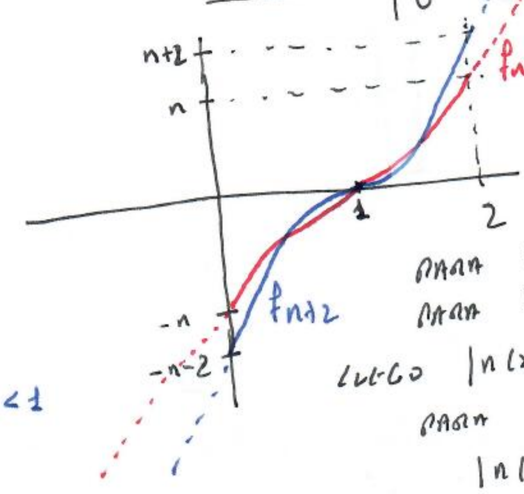
EL LÍMITE PUNTUAL DE f_n ES LA FUNCIÓN $f \equiv 0$.

PROBLEMA 9: a) $f_n(x) = n(x-1)^n$.

GRÁFICA SI n PAR



SI n IMPAR



$f_n \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{SI } x=0 \\ \infty & \text{SI } x>1 \\ \text{NO CONVERGE} & \text{SI } x<1 \end{cases}$

PARA $x=0$ $f_n(0)=0$

PARA $|x-1|<1$, $|x-1|^n > |x-1|$

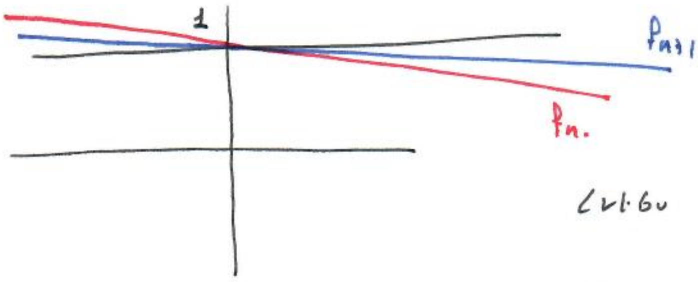
LUEGO $|n(x-1)^n| > n|x-1| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

PARA $|x-1| \geq 1$

$|n(x-1)|^n > n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

APROX POR FUNCIONES

PROBLEMA 4:] b) $f_n(x) = 1 - \frac{x}{n}$.



$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 - \frac{x}{n} = 1$

LUEGO $f = 1$ LÍMITE PUNTUAL

SI $x \in [-M, M]$, $\quad -M \leq x \leq M \iff$

$-\frac{M}{n} \leq \frac{x}{n} \leq \frac{M}{n}$

$\iff 1 - \frac{M}{n} \leq 1 - \frac{x}{n} \leq 1 + \frac{M}{n}$

$1 - \frac{M}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \quad 1 + \frac{M}{n} \to 1$

ASÍ $\left| 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right) \right| \leq \left| \frac{x}{n} \right| \leq \frac{M}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ EN $[-M, M]$.

LUEGO $f_n \to 1$ UNIFORMEMENTE EN $[-M, M]$.

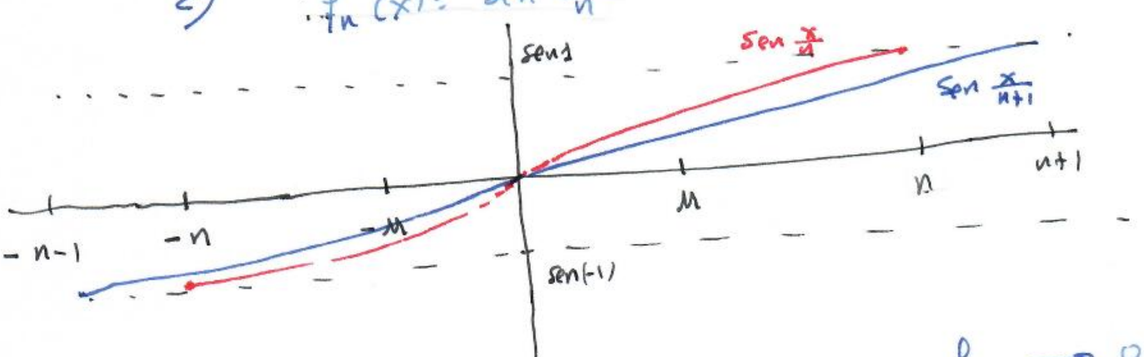
— o —

(f_n) NO CONVERGE UNIFORMEMENTE A 1 EN TODO $\mathbb{R}$, YA QUE $\forall \varepsilon > 0$, Y PARA TODO n, SI $|x| > n\varepsilon$

ENTONCES $\left| 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right) \right| = \left| \frac{x}{n} \right| > \frac{\varepsilon n}{n} = \varepsilon$.

— · —

c) $f_n(x) = \text{sen}\,\frac{x}{n}$



$f_n \to 0$ PUNTUALMENTE

FIJANDO x, $\lim_{n\to\infty} \text{sen}\,\frac{x}{n} = 0$;

SI $x \in [-M, M]$, PARA $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$: $|y| < \delta \Rightarrow |\text{sen}\, y| < \varepsilon$

SEA $n_0 \in \mathbb{N}$ TAL QUE $\frac{M}{n_0} < \delta$, ASÍ $\forall\, |x| < M$

SE TIENE QUE $\left| \frac{x}{n} \right| \leq \frac{M}{n} < \delta \quad \forall n \geq n_0$

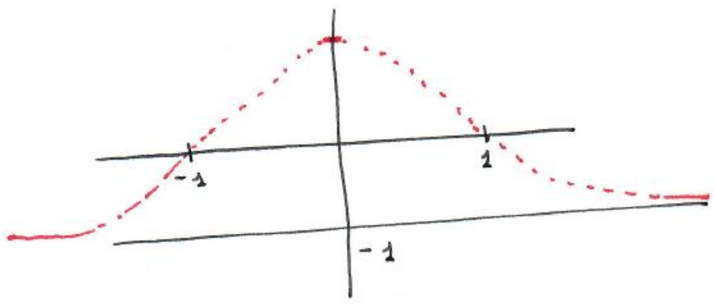
LUEGO $\text{sen}\,\frac{x}{n} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ y $\forall x \in [-x, x]$

$f_n \to 0$ UNIFORMEMENTE EN $[-M, M]$.

OBSERVACIÓN $\text{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{n} = 1$

APROX POR FUNCIONES

PROBLEMA 4-] f) $f_n(x) = \dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} = \dfrac{\frac{1}{x^{2n}} - 1}{\frac{1}{x^{2n}} + 1}$



$x=0$ $f_n(0)=1$ para todo n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 1 & |x|<1 \\ -1 & |x|>1 \\ 0 & |x|=1 \end{cases}$$

(Límite puntual)

NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME POR QUE SE PIERDE LA CONTINUIDAD

SE PUEDE PROBAR QUE SI $a<1$, HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN $[-a, a]$

SE PUEDE PROBAR QUE SI $a>1$ HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$. $f_n \to -1$ uniformemente

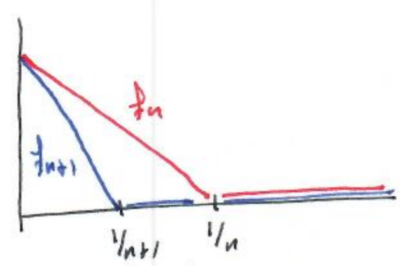
DEM SEA $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$.

$$|-1 - f_n(x)| = \left|-1 - \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\right| = \left|\frac{-2}{1+x^{2n}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{1+a^{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$|x| > a > 1$ $\quad a>1$

g) $f_n(x) = \begin{cases} 1-nx & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$



PARA $x=0$ $f_n(0)=1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$x\neq 0$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, YA QUE SI $x>0$, $\exists n_0$ con $\frac{1}{n_0} < x$ y así $\forall n \geq n_0$ $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < x$ y $f_n(x) = 0$

DADO QUE SE PIERDE LA CONTINUIDAD, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x>0 \end{cases}$ NO ES CONTINUA, NO PUEDE HABER CONVERGENCIA UNIFORME EN $[0,1]$.

SI $x\in[a,1]$, con $a>0$, $f_n \to 0$ uniformemente, ya que $\forall n > n_0$, con $\frac{1}{n_0} < a$, $f_n(x) = 0$ $\forall x \in [a,1]$.

APROX. POR FUNCIONES

PROBLEMA 10:) SEA $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}$ $\quad x \in (0,1]$

$f_n(x) \to \frac{1}{x}$ $\quad \forall x \in (0,1]$ PUNTUALMENTE.

Y $|f(x) - f_n(x)| = \left|\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

LA CONVERGENCIA, ES UNIFORME EN $(0,1]$.

SEA $g_n(x) = \frac{1}{n}$, CLARAMENTE $g_n \to 0$ UNIFORMEMENTE EN $(0,1]$

AHORA $f_n(x)\, g_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ SI $x \in (0,1]$

PERO NO HAY CONVERGENCIA UNIVERGENCIA UNIFORME

YA QUE $|f_{n_0}(x) - 0| = \frac{1}{n_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n_0}\right)$ SI $x_0 = \frac{1}{n_0^4} \in (0,1]$

$$f_{n_0}\left(\frac{1}{n_0^4}\right) = \frac{1}{n_0}\left(n_0^4 + \frac{1}{n_0}\right) = n_0^3 + \frac{1}{n_0^2} > 1.$$

— o —

PROBLEMA 11:) a) SEA $f_n(x) = \begin{cases} 1/x & \text{SI } x \in [1/n, 1] \\ n & \text{SI } x \in [0, 1/n] \end{cases}$

CADA FUNCIÓN f_n ESTÁ ACOTADA POR n,

Y $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x \in (0,1]$ LÍMITE PUNTUAL NO ACOTADO

• b) SI $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE SOBRE A Y CADA f_n ESTÁ ACOTADA SOBRE A, ENTONCES PARA $\varepsilon = 1$, $\exists n_0$: $n \geq n_0$ $|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq 1$ $\forall x \in A$

SI $|f_{n_0}(x)| \leq M$ PARA ALGÚN $M > 0$ Y $\forall x \in A$,

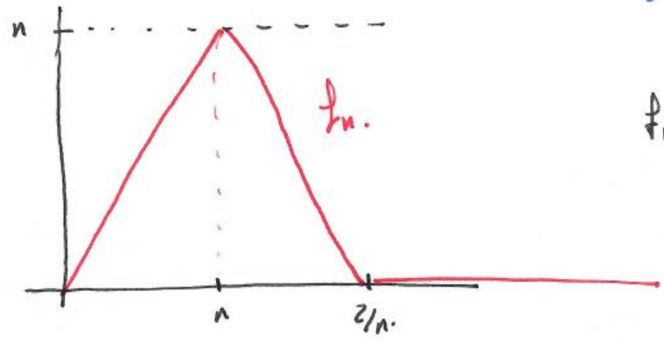
ENTONCES $|f(x)| \leq |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq M+1$ $\forall x \in A$

LUEGO EL LÍMITE UNIFORME TIENE QUE ESTAR ACOTADO.

APROX POR FUNCIONES

PROBLEMA 12:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{n} \\ -n^2\left(x - \frac{2}{n}\right) & \text{si } 1/n \le x < 2/n \\ 0 & \text{si } 2/n \le x \le 1 \end{cases}$$



$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ límite puntual

(ver ejercicio 8 b))

a) En $[0,1]$ no hay convergencia uniforme, ya que

$$|0 - f_n(\tfrac{1}{n})| = n \uparrow \infty \quad n \in \mathbb{N}.$$

En $[r,1]$, $r>0$, como $\exists n_0$ tal que $r > \frac{1}{n_0}$, $\forall x \in [r,1]$, $f_n(x) = 0$, y en general $\forall n > n_0$ y $\forall x \in [r,1]$, en $[r,1]$ $(r>0)$

Así $f_n \to 0$ uniformemente en $[r,1]$ $(r>0)$

b) $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$\int_0^1 f_n = 1$ área de un triángulo

Por otro lado $\int_0^1 0\,dx = 0$ no se da la igualdad

PROBLEMA 13: a) $$\frac{\operatorname{sen} t}{t} = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}(-1)^k}{(2k+1)!}$$

serie de Taylor, converge uniformemente en $[-a,a]$

Luego $$\int_1^a \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \int_1^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}(-1)^k}{(2k+1)!}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_1^a \frac{t^{2k}(-1)^k}{(2k+1)!}\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!}\Bigg|_1^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!} - \sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!}$$

b) Por a) $$\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1/2)^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!};$$

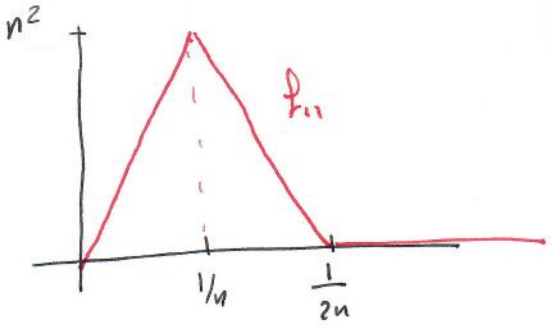
si $k \ge 1$ $\quad \frac{1}{2^{2k+1}} \cdot \frac{1}{(2k+1)(2k+1)!} \le \frac{1}{2^{2k+1}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{3k+2}}$

Así $$\left|\sum_{k=k_0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{2k+1}} \cdot \frac{1}{(2k+1)(2k+1)!}\right| \le \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{2^{3k+2}} = \frac{\frac{1}{2^{3k_0+2}}}{1/2} = \frac{1}{2^{3k_0+1}}$$ si $k_0 \ge 5$ $\frac{1}{2^{16}} < \frac{1}{10^4}$.

ANEXO POR FUNCIONES

PROBLEMA 14:

$$f_n(t) = \begin{cases} 2n^3 t & \text{si } t \in [0, 1/2n] \\ -2n^3(t - 1/n) & \text{si } t \in [\frac{1}{2n}, 1/n] \\ 0 & \text{si } t > 1/n \end{cases}$$



- $f_n \longrightarrow 0$ puntualmente en $[0,1]$ (fijar t)
- $f_n(\frac{1}{n}) = n^2 \; \forall n$, no puede haber convergencia uniforme en $[0,1]$

PROBLEMA 15: c) $f_n(x) = \sqrt[n]{x} \quad n \in \mathbb{N}$

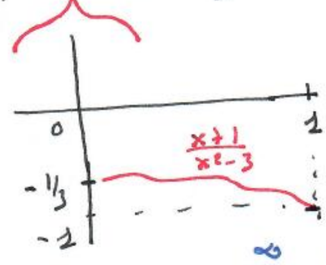
si $x = 0$ $\quad f_n(0) = 0$

si $x > 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

f no es continua, luego no hay convergencia uniforme en $[0,1]$

d) $|f_n(x)| = \frac{1}{n} \left| \frac{x+1}{x^2-3} \right| \leq \frac{1}{n} \frac{2}{3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ convergencia uniforme a cero



PROBLEMA 16: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} (x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\infty} (x-1)^k$

si $x \in (0,2)$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(x-1)^k}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\infty} |x-1|^k = \frac{1}{\sqrt{n}} A(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

serie geométrica

- para $|x-1| \geq 1$ no converge
- en $x = 2$ no hay convergencia
- $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\infty} |x-1|^k = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{|x-1|}{1-|x-1|}$

para $x_n = 2 - \frac{1}{n}$ $\quad f_n(x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1-\frac{1}{n}}{1-(1-\frac{1}{n})} = \frac{n(n-1)}{\sqrt{n} \cdot n} \uparrow \infty$

no puede haber convergencia uniforme en $(0,2)$