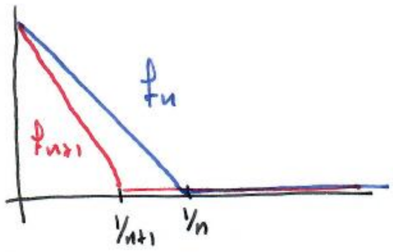
SUCESIONES DE FUNCIONES

PROBLEMA 1: a) $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 1/n \\ -nx+1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$



$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$

si $x > 0$, $\exists n_0 : \frac{1}{n_0} < x$, luego

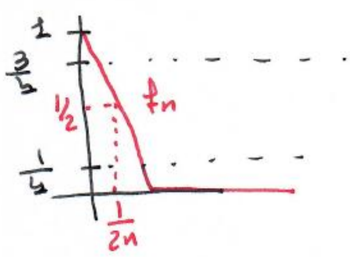
$\forall n > \frac{1}{n}$, $f_n(x) = 0$

Así $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

Límite puntual $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Cada f_n es continua y f no lo es, luego no hay convergencia uniforme en $[0,1]$

Otra forma de verlo. Si $\varepsilon = \frac{1}{4}$

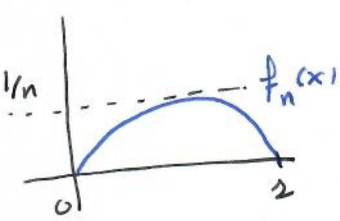


$f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$, así

$\left|f - f_n\left(\frac{1}{2n}\right)\right| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} \quad \forall n.$

b) $f_n(x) = x - x^n$ para $x \in [0,1]$

Si $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x \geq x^n.$



$f_n'(x) = 1 - nx$; $f_n'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{n}$

y $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^n} < \frac{1}{n}$

Luego $|0 - f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\sup\{f_n(x) : x \in [0,1]\} = 1/n$

Así $f_n \to 0$ uniformemente en $[0,1]$

SUCESIONES DE FUNCIONES

PROBLEMA 1:) e) $f_n(x) = \dfrac{1+x\ln n}{1+xn}$ $\quad x \in [0,\infty)$

SI $x=0$ $\quad f_n(0) = 1$

SI $x>0$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+x\ln n}{1+xn} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n} + x\frac{\ln n}{n}}{1/n + x} = 0$

LUEGO $f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & x>0 \end{cases}$ ES EL LÍMITE PUNTUAL

COMO f NO ES CONTINUA Y SI LO ES CADA $\dfrac{1+x\ln x}{1+xn}$, LA CONVERGENCIA NO ES UNIFORME EN $[0,\infty)$

AHORA EN $[a,\infty)$ $\quad a>0$

$$\left|\frac{1+x\ln n}{1+xn}\right| \le \frac{1+x\ln n}{xn} \le \frac{1}{an} + \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

UNIFORMEMENTE EN $[a,\infty)$

LUEGO $f_n \to 0$

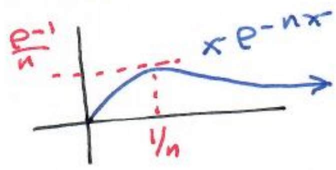
f) $f_n(x) = (\cos \pi x)^{2n}$. $\quad$ FUNCIONES CONTINUAS

SI $x = \dfrac{\pi + k\pi}{\pi}$, $\quad f_n\left(\dfrac{\pi+k\pi}{\pi}\right) = 1$

SI $x \neq \dfrac{\pi+k\pi}{\pi} = 1+k$ $\quad \cos(\pi x) < 1$ Y ASÍ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

EL LÍMITE PUNTUAL NO ES CONTINUO, LUEGO NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME.

PROBLEMA 2:) a) $f_n(x) = xe^{-nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$



$f_n'(x) = e^{-nx} - nxe^{-nx} = e^{-nx}[1-nx]$.

SI $x = \frac{1}{n}$, f TIENE UN MÁXIMO CON

$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} e^{-n\frac{1}{n}} = \dfrac{e^{-1}}{n}$.

ASÍ $|0 - f_n(x)| \le \dfrac{e^{-1}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\quad$ HAY CONVERGENCIA UNIFORME.

c) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$ $\quad \begin{cases} f_n(0) = 0 \\ f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 & x>0 \end{cases}$; LÍMITE PUNTUAL NO CONTINUO, LUEGO NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN $[0,\infty)$

AHORA SI $x \in [a,\infty)$, $a>0$, $\quad \left|1 - \dfrac{nx}{1+nx}\right| = \left|\dfrac{1}{1+nx}\right| \le \dfrac{1}{1+an} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

LUEGO $f_n \to 1$ UNIFORMEMENTE EN $[a,\infty)$, $a>0$.

SUCESIONES DE FUNCIONES

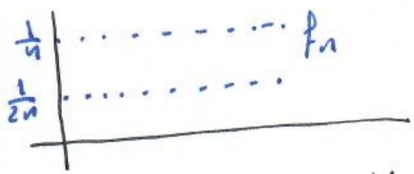
PROBLEMA 3: $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ $\quad x \in [0,2]$

SI $x = 0$ $\quad f_n(0) = 0$

SI $x > 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x^n}+1}$ $\begin{cases} 0 & \text{SI } x \in [0,1) \\ 1/2 & \text{SI } x = 1 \\ 1 & \text{SI } x \in (1,2] \end{cases}$

COMO EL LÍMITE PUNTUAL NO ES CONTINUO Y SI LO SON CADA UNA DE LAS f_n, NO PUEDE HABER CONVERGENCIA UNIFORME.

PROBLEMA 4: SEA $f_n(x) = \begin{cases} 1/n & \text{SI } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ \frac{1}{2n} & \text{SI } x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}$



f_n NO ES CONTINUA EN NINGÚN PUNTO DE $[0,1]$ YA QUE $\forall [a,b] \subseteq [0,1]$, $[a,b] \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ Y $[a,b] - \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

POR OTRO LADO $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, LUEGO $f_n \to 0$ UNIFORMEMENTE EN $[0,1]$.

PROBLEMA 5: DADO $\varepsilon > 0$ EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE SI $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (f UNIFOR. CONTINUA)

AHORA $|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - f(x+\frac{1}{n})| \leq \varepsilon$ PARA TODO $n \geq n_0 \geq \frac{1}{\delta}$ (e.d. $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \delta$, ASÍ $|x - x - \frac{1}{n}| < \delta$) Y PARA TODO $x \in \mathbb{R}$. LUEGO POR DEFINICIÓN DE CONVERGENCIA UNIFORME,

$f_n \to f$ UNIFORMEMENTE EN $\mathbb{R}$.

SUCESIONES DE FUNCIONES

PROBLEMA 6: $f_n(x) = n^2 x e^{-nx^2}$, $x \in [0,1]$

a) $f_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

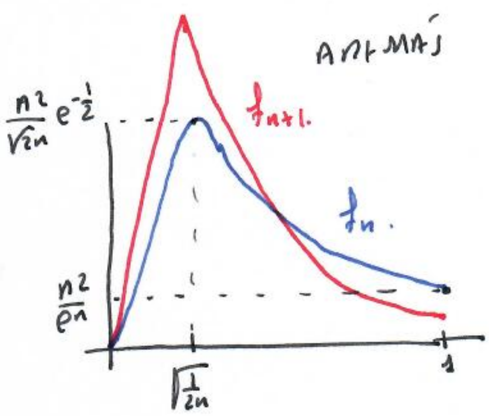
$f_n(1) = \frac{n^2}{e^n}$ $\left(\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right)$

$f_n'(x) = n^2 e^{-nx^2} + n^2 x e^{-nx^2}(-2nx) =$

$= n^2 e^{-nx^2}\left[1 - 2nx^2\right]$

$f_n'(x) = 0 \iff 1 - 2nx^2 = 0 \iff x = \sqrt{\frac{1}{2n}}$ MÁXIMO.

Además $f_n\left(\sqrt{\frac{1}{2n}}\right) = \frac{n^2}{\sqrt{2n}} e^{-n\frac{1}{2n}} = \frac{n^2}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{1}{2}} \uparrow_{n\to\infty} \infty$



— · —

Ahora $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 x}{e^{nx^2}} = 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Luego el límite puntual es $f \equiv 0$, pero claramente no hay convergencia uniforme.

$\left|0 - f_n\left(\sqrt{\frac{1}{2n}}\right)\right| = \frac{n^2}{\sqrt{2n}} e^{-1/2} \uparrow_{n\to\infty} \infty$

b) 1) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n^2 x e^{-nx^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} -\frac{n}{2}\int_0^1 -2nx\, e^{-nx^2}\,dx =$

$= \lim_{n\to\infty} -\frac{n}{2}\left(e^{-nx^2} \Big|_0^1 = \lim_{n\to\infty} -\frac{n}{2}\left(e^{-n} - 1\right) = \infty\right.$

$\int_0^1 0\,dx \equiv 0$

2) $\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 1} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$

f_n continua.

$\lim_{x\to 1} f(x) \equiv 0$

3) $f'(1/2) = 0$, $f \equiv 0$; por otro lado

$f_n'(x) = n^2 e^{-nx^2}\left[1 - 2nx^2\right]$; $f_n'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n^2}{e^{\frac{n}{4}}}\left[1 - \frac{n}{2}\right] =$

$= \frac{n^2[2-n]}{2e^{n/4}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

SUCESIONES DE FUNCIONES

PROBLEMA 7: $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = r_1, r_2 \dots r_n \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] - \{r_1 \dots r_n\} \end{cases}$ $r: \mathbb{N} \to [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $n \to r_n$. Biyección.

f_n es continua salvo en $x = r_1 r_2 \dots r_n$, y por tanto f_n es integrable y

$$\int_0^1 f_n \equiv 0.$$

Es claro que $f_1(x) \le f_2(x) \le \dots \le f_n(x) \le \dots$ (y $f_n(r_{n+1}) = 0 < 1 = f_{n+1}(r_{n+1})$)

Claro $f_n(r_j) = f_{n+1}(r_j)$ $j = 1, \dots, n$

Si $x \ne r_1 \dots r_{n+1}$, $f_n(x) = f_{n+1}(x) = 0$.

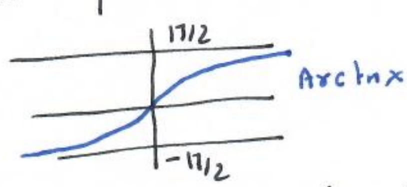
Si $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ (claro a partir de n_0 con $r_{n_0} = x$, $f_n(x) = 1$ $n \ge n_0$)

Si $x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

El límite puntual es la función de Dirichlet ¡que no es integrable Riemann en $[0,1]$!

PROBLEMA 8: $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{Arctan} x^n$.

$$\left| \frac{1}{n} \operatorname{Arctan} x^n \right| \le \frac{\pi}{2} \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ luego}$$



$f_n(x) \longrightarrow 0$ uniformemente en todo $\mathbb{R}$.

Ahora $f_n'(x) = \frac{1}{\cancel{n}} \frac{1}{1 + x^{2n}} \cancel{n} x^{n-1}$.

$f'(1) = 0$ y $f_n'(1) = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/2$

PROBLEMA 9: Sea $\varepsilon > 0$ $\exists N$ con $|f(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall x$.

Como f_N es unif. continua $\exists \delta > 0$: $|x - y| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon/3$

Luego si $|x - y| < \delta \Rightarrow \boxed{|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \le \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.}$

f es uniformemente continua.

SUCESIONES DE FUNCIONES

PROBLEMA 10:) c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^n} =$

$= x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^n = \begin{cases} 0 & \text{SI } x=0 \\ x^2 \underbrace{\frac{\frac{1}{x^2+1}}{1-\frac{1}{x^2+1}}}_{\text{SUMA SERIE GEOMÉTRICA}} = 1 & x \in (0,1] \end{cases}$

$0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$

LÍMITE PUNTUAL $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{SI } x=0 \\ 1 & \text{SI } x \neq 0 \end{cases}$ f NO ES CONTINUA

Y CADA $\sum_{n=1}^{N} \frac{x^2}{(x^2+1)^n}$ ES CONTINUA, LUEGO NO PUEDE HABER CONVERGENCIA UNIFORME

PROBLEMA 11:) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

PARA $x=0$, LA SERIE VALE CERO

SI $x>0$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{x(2n-1)}$

ESTA SERIE ES CONVERGENTE.

PARA $x \in (0,1)$ ESTA SERIE ALTERNADA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ CONVERGE.

PARA $x=1$ LA SERIE

LUEGO EXISTE EL LÍMITE PUNTUAL.

AHORA $\left|(-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right| \underset{x \leq r}{\leq} r^{2n-1}$ y $\sum r^{2n-1} < \infty$ $0 \leq r < 1$ SERIE GEOMÉTRICA

EL CRITERIO M-WEIERSTRASS NOS DA LA CONVERGENCIA UNIFORME (DE LA SERIE A f (LÍMITE PUNTUAL) EN $[0,r]$

ASÍ $\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \underset{\substack{\text{TEORÍA} \\ \text{SERIE DE TAYLOR}}}{=} \frac{1}{1+x^2}$ $x \in [0,r]$

CON CONVERGENCIA UNIFORME, REFERIDA A LA DERIVADA

ASÍ EL TEOREMA DE LA DERIVADA DE FUNCIONES NOS DICE QUE

$f'(x) = \sum (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$ $x \in [0,r]$ y $f = \operatorname{Arctan} x$ $x \in [0,r]$

ASÍ $f(1) = \operatorname{Arctan} 1 = \pi/4$

SUCESIONES DE FUNCIONES

PROBLEMA 12:] SEA $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arctan} \frac{x}{n^2}$ CON $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{a \to 0} \frac{\operatorname{Arctan} a}{a} \underset{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim_{a \to 0} \frac{\frac{1}{1+a^2}}{1} = 1 \; ; \quad \text{SEA } |x| \leq M.$$

SEA $\varepsilon = 1/2$, EXISTE n_0, TAL QUE SI $n \geq n_0$

$$\left| \operatorname{Arctan} \frac{x}{n^2} \right| \leq \operatorname{Arctan} \frac{M}{n^2} \leq 3/2 \frac{M}{n^2} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

ADEMAS $\sum_{n=1}^{\infty} 3/2 \frac{M}{n^2} < \infty$. POR LA PRUEBA M- WEIERSTRASS, SE SIGUE QUE $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arctan} \frac{x}{n^2}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE A SU LÍMITE PUNTUAL.

POR OTRO LADO $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{Arctan} \frac{x}{n^2} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{x^2}{n^4}} \cdot \frac{1}{n^2} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+x^2} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{CONVERGE}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

POR LA PRUEBA M- WEIERSTRASS LA SERIE $\sum \left(\operatorname{Arctan} \frac{x}{n^2} \right)'$ CONVERGE UNIFORMEMENTE.

LUEGO LA DERIVADA DEL LÍMITE ES EL LÍMITE DE LAS DERIVADAS

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{Arctan} \frac{x}{n^2} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+x^2}$$

— o —.