SERIES DE FUNCIONES

PROBLEMA 1:) a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$

$\frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$ LA PRUEBA M-WEIERSTRASS NOS DICE QUE LA SERIE CONVERGE UNIFORMEMENTE EN TODO $\mathbb{R}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x^2}$ SI $|x| \geq a > 0$, ENTONCES

$\frac{1}{n^2 x^2} \leq \frac{1}{n^2 a^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 n^2} < \infty$ LA PRUEBA M-WEIERSTRASS NOS DICE QUE LA SERIE CONVERGE UNIFORMEMENTE EN $\mathbb{R} \setminus (-a, a)$.

OBSERVEMOS QUE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{x^2} A$.

$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, LA SERIE CONVERGE PUNTUALMENTE A LA FUNCIÓN $\frac{1}{x^2} A$ EN $\mathbb{R} - \{0\}$.

AHORA $\left| \frac{1}{x^2} A - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2 x^2} \right| = \frac{1}{x^2} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right| \xrightarrow[x \to 0]{} \infty$

LUEGO NO PUEDE HABER CONVERGENCIA UNIFORME EN $\mathbb{R} - \{0\}$.

d) $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ SI $x \geq a > 1$ $\frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1+a^n} \leq \left(\frac{1}{a}\right)^n$. y como $\frac{1}{a} < 1$ ($a > 1$)

LA SERIE GEOMÉTRICA $\sum \left(\frac{1}{a}\right)^n < \infty$, LUEGO LA PRUEBA M-WEIERSTRASS NOS DICE QUE LA SERIE $\sum_{n=1} \frac{1}{1+x^n}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE EN $[a, \infty)$, $a > 1$.

PARA CADA $x > 1$, EXISTE $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ LÍMITE PUNTUAL.

AHORA $\left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+x^n} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n} \right| \geq \frac{1}{1+1+\varepsilon} \geq \frac{1}{4}$ NO PUEDE HABER CONVERGENCIA UNIFORME EN $(1, \infty)$

FIJANDO N, $x = \sqrt[N+1]{1+\varepsilon}$

SERIES DE FUNCIONES

PROBLEMA 1: e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$.

SI $0 \le x \le a < 1$ $\frac{x^n}{1+x^n} \le a^n$ Y LA SERIE GEOMÉTRICA $\sum a^n < \infty$ ES CONVERGENTE. LA PRUEBA M-WEIERSTRASS NOS DICE QUE LA SERIE FUNCIONAL CONVERGE UNIFORMEMENTE A SU LÍMITE PUNTUAL EN $[0, a]$ $a < 1$

LUEGO EXISTE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$ PUNTUALMENTE PARA TODO $x \in [0, 1)$; CLARAMENTE PARA $x=1$ NO HAY LÍMITE PUNTUAL.

RESPECTO DE LA CONVERGENCIA UNIFORME EN $[0,1)$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{1+x^n} \right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n} \ge \frac{1}{2}$$, LUEGO

FIJANDO N: SI $x = \sqrt[N+1]{\frac{1}{2}}$

NO PUEDE HABER CONVERGENCIA UNIFORME EN $[0, 1)$.

PROBLEMA 2: d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n}{n!} = \sum_{n=1}^{72} \frac{x+n}{n!} + \sum_{n=73}^{\infty} \frac{x+n}{n!} \le$

$\le \sum_{n=1}^{72} \frac{x+n}{n!} + \sum_{n=73}^{\infty} \frac{2n}{n!}$ Y COMO $2 \sum_{n=73}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} < \infty$

LA SERIE CONVERGE UNIFORMEMENTE PARA TODO $x \in [0, 72]$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n+1}{n^2} \ge \sum \frac{x^n}{n^2}$

CRITERIO DEL COCIENTE

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} x = x$$

SI $x > 1$, LA SERIE DIVERGE.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx-1}{2+\operatorname{sen} x} \ge \sum_{n=1}^{\infty} nx-1$ Y $\lim_{n\to\infty} nx-1 \ne 0$ $\forall x \ne 0$.

$-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$

$\sum \frac{x^n}{2^n}$ NO CONVERGE SI $x > 2$.

SERIES DE FUNCIONES

PROBLEMA 3: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2x+1}$.

- SI $x>0$ $\quad \sum \frac{1}{n^2x+1} \le \frac{1}{x}\sum \frac{1}{n^2} < \infty$ LA SERIE CONVERGE
- SI $x=0$ LA SERIE NO CONVERGE
- SI $x=-\frac{1}{n^2}$ LA SERIE NO ESTÁ DEFINIDA
- SI $x<0$ $x\neq -\frac{1}{n^2}$, $\sum \left|\frac{1}{n^2x+1}\right| \le$

$$\le \sum_{\substack{n=1\\ nx\le 1}} \frac{1}{|n^2x+1|} + \sum_{nx>1} \frac{1}{|n^2x-xn|} =$$

$$= \sum_{\substack{n=1\\ nx\le 1}} \frac{1}{n^2x+1} - \frac{1}{x}\sum \frac{1}{n^2-n} < \infty$$

OBSERVEMOS QUE SI $|x|>a>0$, ALLÍ TENEMOS CONVERGENCIA UNIFORME Y EL LÍMITE PUNTUAL ES CONTINUO.

EN $(0,\infty)$ NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME, YA QUE $\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2x+1} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2x+1}\right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2x+1} \ge \frac{1}{2}$ $\downarrow$ $0<x<\frac{1}{(N+1)^2}$

LUEGO NO PUEDE HABER CONVERGENCIA UNIFORME.

PROBLEMA 4: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \operatorname{sen} nx$

$\left|\frac{2^n}{n!}\operatorname{sen} nx\right| \le \frac{2^n}{n!}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2-1$

LA SERIE CONVERGE PUNTUALMENTE DE FORMA ABSOLUTA PARA TODO $x\in\mathbb{R}$. ADEMÁS ESTA CONVERGENCIA ES UNIFORME SEGÚN NOS DICE LA PRUEBA M-WEIERSTRASS.

PROBLEMA 5: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}$ COMO $\left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}\right| < \frac{1}{n^3}$ Y $\sum \frac{1}{n^3} < \infty$

LA SERIE CONVERGE UNIFORMEMENTE EN TODO $\mathbb{R}$

LA SERIE DERIVANDO TÉRMINO A TÉRMINO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ Y $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$

LUEGO TAMBIÉN TENEMOS CONVERGENCIA UNIFORME EN TODO $\mathbb{R}$. USANDO EL TEOREMA APROPIADO EXISTE $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

SERIES DE FUNCIONES

PROBLEMA 6: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k x^k$

USANDO EL CRITERIO DEL COCIENTE:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)\,|x|^{k+1}}{k\,|x|^k} = |x| \;;$$

ASI SI $|x|<1$ LA SERIE CONVERGE Y LO HACE UNIFORMEMENTE EN $[-r,r]$ CON $r<1$ (ES UNA SERIE DE POTENCIAS CON RADIO DE CONVERGENCIA 1)

SABEMOS QUE f ES ANALITICA Y QUE

$$\sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k)}(0)}{k!} x^k$$

LUEGO $f^{5)}(0) = 5!\,5 = 600.$

PROBLEMA 7:

$$\int_1^a \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

EL DESARROLLO EN SERIE DE SEN T

$$\operatorname{sen} t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \; ; \text{ ASI}$$

$$\frac{\operatorname{sen} t}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!} \quad \text{CON CONVERGENCIA}$$

UNIFORME SI $|t| \geq r > 0$, CLARO

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$ TAL QUE SI $n \geq N$

$$\left| \operatorname{sen} t - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)\, t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \varepsilon$$

ASI

$$\left| \frac{\operatorname{sen} t}{t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)\, t^{2k}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{\varepsilon}{r}.$$

LUEGO

$$\int_1^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_1^a \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}\, dt =$$

$$\underset{\text{INTEGRANDO}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} \Big|_1^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left[a^{2k+1} - 1 \right]}{(2k+1)(2k+1)!}$$

SERIES DE FUNCIONES

PROBLEMA 8: $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad ; \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$$

OBSERVEMOS QUE PARA $x=0$ ESTA ÚLTIMA SERIE CONVERGE A 1, VEAMOS QUE CONVERGE EN TODO x. POR EL CRITERIO DEL COCIENTE:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{k+1} x^{2k+2}}{(2k+3)!}\right|}{\left|\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2k+3)(2k+2)} |x|^2 = 0$$

EL RADIO DE CONVERGENCIA DE ESTA SERIE ES TODO $\mathbb{R}$.

PROBLEMA 9: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

CRITERIO DEL COCIENTE: $\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}\right|}{\left|\frac{x^n}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{2} < 1$

$\Leftrightarrow |x| < 2$. RADIO DE CONVERGENCIA 2

PARA $x=1$ LA SERIE DIVERGE.

PARA $x=-1$, ES UNA SERIE ALTERNADA CON $\frac{1}{2^n} \downarrow 0$, ES CONVERGENTE POR EL CRITERIO DE LEIBNIZ

g) $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{2^2} + \frac{x^4}{3^2} + \frac{x^5}{2^3} + \frac{x^6}{3^3} + \dots =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{3^k}$$

CRITERIO DEL COCIENTE.

$$\begin{cases} \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{|x|^{2k+1}}{2^{k+1}}}{\frac{|x|^{2k-1}}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}|x|^2 = \frac{|x|^2}{2} < 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2} \\ \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{|x|^{2k+2}}{3^{k+1}}}{\frac{|x|^{2k}}{3^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3}|x|^2 = \frac{|x|^2}{3} < 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{3} \end{cases}$$

LUEGO AMBAS SERIES CONVERGEN SI $\boxed{|x| < \sqrt{2}} < \sqrt{3}$.

PARA $x = \sqrt{2}$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^{2k-1}}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2^k}{2^k} = \infty$

$x = -\sqrt{2}$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}(\sqrt{2})^{2k-1}}{2^k} = -\infty$.

SERIES DE FUNCIONES

PROBLEMA 10: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

CRITERIO DEL COCIENTE $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \cdot |x|^{n+1}}{\frac{1}{n^n}|x|^n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n}|x| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n |x| =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} |x| = 0.$ RADIO DE CONVERGENCIA INFINITO

$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$. COMO $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

EL RADIO DE CONVERGENCIA ES $\frac{1}{e}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n/2}} x^n$.

CRITERIO DEL COCIENTE $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^{n+1/2}}}{\frac{1}{n^{n/2}}} |x| =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n/2}}{(n+1)^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}|x| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/2}|x| =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^{1/2} |x| = 0$

$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}$

EL RADIO DE CONVERGENCIA ES INFINITO

d) $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k^2}$ CLARAMENTE EL RADIO DE CONVERGENCIA ES 1; LA SERIE NO CONVERGE PARA $x = 1$ NI EN $x = -1$

e) $\sum_{m=1}^{\infty} x^{m!}$ COMO EN EL CASO ANTERIOR $R = 1$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+3}}{a_{2n+1}} |x|^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1\cdot 3 \cdots (2n+1)}{2\cdot 4 \cdots (2n+2)}}{\frac{1\cdot 3 \cdots 2n-1}{2\cdot 4 \cdots 2n}} |x|^2 =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2}|x|^2 = |x|^2 < 1 \iff |x| < 1$; RADIO DE CONVERGENCIA 1.

SERIES DE FUNCIONES

PROBLEMA 11: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

CRITERIO DEL COCIENTE $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{|x|^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2}|x| = |x| < 1$

RADIO DE CONVERGENCIA 1.

LAS SERIES $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ SON ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ COMO EN EL CASO ANTERIOR, EL CRITERIO DEL COCIENTE NOS DA RADIO 1

CON $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ CONVERGENTE (CRITERIO DE LEIBNIZ)

Y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ NO CONVERGENTE (SERIE ARMÓNICA)

$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 = x^2 + x^2 + x^2 + \dots = \infty$ SALVO PARA $x=0$.

PROBLEMA 12: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n (n!)^2}$

CRITERIO DEL COCIENTE $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4^{n+1}((n+1)!)^2}}{\frac{1}{4^n (n!)^2}} |x|^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\frac{1}{(n+1)^2}|x|^2 = 0$

LUEGO EL RADIO DE CONVERGENCIA ES INFINITO

COMO ES UNA SERIE DE POTENCIAS, EXISTEN f' y f'' (DERIVANDO TÉRMINO A TÉRMINO)

CON
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n\, x^{2n-1}}{4^n (n!)^2}$$

Y
$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n(2n-1)\, x^{2n-2}}{4^n (n!)^2}$$

AHORA
$$x f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4^n (n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{4^{n-1} ((n-1)!)^2}$$

$+$
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{4^{n-1} 2 (n!)(n-1)!}$$

$$x f''(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n(2n-1) x^{2n-2}}{4^n (n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1) x^{2n-1}}{4^{n-1} 2 (n!)(n-1)!}$$

$= 0$

$\sum_{n=1} \frac{2n - 1 - (2n-1)}{4^{n-1} 2 (n!)(n-1)!} x^{2n}$

SERIES DE FUNCIONES

PROBLEMA 13:) $f(x) = x^6 e^x = x^6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+6}}{n!} = \sum_{k=6}^{\infty} \frac{x^k}{(k-6)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

LUEGO $\frac{f^{(10)}(0)}{10!} = \frac{1}{(10-6)!} \Rightarrow f^{(10)}(0) = \frac{10!}{4!}$

PROBLEMA 14:) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

SEA $\ln(x+1)$

ASÍ $(\ln(x+1))' = \frac{1}{x+1} = \frac{1+x}{1+x} - \frac{x}{1+x} =$

$$= 1 - x\frac{(1+x)}{1+x} + \frac{x^2}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots$$

ASÍ $\frac{1}{x-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k (-1)^k$ SERIE DE POTENCIAS DE RADIO 1

INTEGRANDO

$$\ln(x+1) = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} x^k (-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x x^k (-1)^k dx =$$

$|x|<1$ CONVERGENCIA UNIFORME

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} (-1)^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} (-1)^{k+1}$$ SERIE DE POTENCIAS DE RADIO 1

PARA $x = 1$, LA SERIE ES ALTERNADA Y CONVERGE.

$$\ln 2 = \ell_{x \to 1^-} \ln(x+1) = \ell_{x \to 1^-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} (-1)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k+1}.$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k+1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} (-1)^{k+1} \right| \leq (1)$$

$$\leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-x^k)(-1)^{k+1}}{k} \right| \xrightarrow[x \to 1]{} 0$$

¡COMPROBADO!

SEA $\varepsilon > 0$, $\exists N$ TAL QUE $\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \right| < \varepsilon/2$

$f_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{x^k}{k} (-1)^{k+1}$ ES UNIFORMEMENTE CONTINUA EN $[-1,1]$, $\exists \delta > 0$ TAL QUE SI

$|1-x| < \delta \Rightarrow |f_N(1) - f_N(x)| \leq \varepsilon/2$ ASÍ SI $0 < x < 1$ (1) $\leq |f_N(1) - f_N(x)| + \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(1-x^k)(-1)^k}{k!} \right| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2$

$0 < 1 - x^k \leq \delta$

SERIE DE FUNCIONES

PROBLEMA 17

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

Por el criterio del cociente el radio de convergencia es 1

DERIVANDO $f'(x) = \left(\displaystyle\sum_{n=1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\, x^{2n-2}}{2n-1} =$

$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}$

↓ serie geométrica

AHORA INTEGRANDO

$f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(s) = \int_0^x \frac{1}{1-s^2}\, ds = \int_0^x \frac{1/2}{1+s} + \frac{1/2}{1-s}\, ds =$

$= \frac{1}{2} \ln(1+s) - \frac{1}{2} \ln(1-s) \Big|_0^x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Por el criterio del cociente el radio de convergencia es infinito

DERIVANDO
$f'(x) = \left(\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(-1)^n 2n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2n\,(2n+1)\, x^{2n}}{(2n+1)!} =$

$= \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\,(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x \operatorname{sen} x$

LUEGO $f(x) = \displaystyle\int_0^x s \operatorname{sen} s\, ds.$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^3+1)\, x^{n-1}$

PONEMOS $(n^3+1) = A\, n(n+1)(n+2) + B\, n(n+1) + Cn + D$

RESOLVEMOS Y $A=1 \quad B=-3 \quad C=1 \quad y \quad D=1$

LUEGO $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^3+1)\, x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(n+2)\, x^{n-1} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\, x^{n-1} +$
$\displaystyle + \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} + D \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} =$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$= \left(\frac{1}{1-x}\right)''' - 3\left(\frac{1}{1-x}\right)'' + \left(\frac{1}{1-x}\right)' + \frac{1}{1-x} =$

$= \frac{6}{(1-x)^4} - \frac{6}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$

SERIES DE FUNCIONES

PROBLEMA 16:] a) $\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t} \geq 0$ CONTINUA EN TODO $\mathbb{R}$

LUEGO $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t}\, dt$ DERIVABLE EN TODO $\mathbb{R}$

b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{x}(e^x - 1)$

CONTINUA EN TODO $\mathbb{R}$ $\left(\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \right)$

c) $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{|t-2|}}\, dt$ INTEGRAL IMPROPIA PARA

$x = 2$, PERO EXISTE $\lim_{x\to 2} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{|t-2|}}\, dt$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-x)^n}{n}$ RADIO DE CONVERGENCIA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|3-x|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|3-x|}{n}} = |3-x| < 1$$

$\iff x \in (2, 4)$. LUEGO LA

PARA $x = 2$, LA SERIE DIVERGE; LUEGO LA FUNCIÓN NO ES CONTINUA

PROBLEMA 17:] $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{2n}}{(2n)!}$

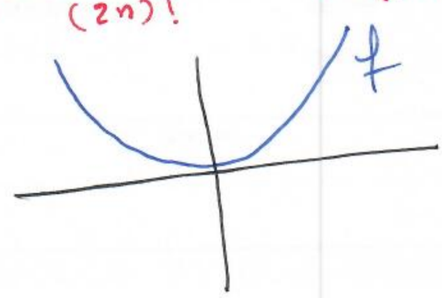
DOMINIO: RADIO DE CONVERGENCIA POR EL CRITERIO DEL COCIENTE ES INFINITO.

FUNCIÓN PAR $f(x) = f(-x)$

PARA $x > 0$, CRECIENTE CLARAMENTE; Y NO ACOTADA

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, 2n\, x^{2n-1}}{(2n)!}$; $f''(x) = \sum \frac{n\, 2n(2n-1)\, x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} \geq 0$

LUEGO f CONVEXA



PROBLEMA 18: Y 19:]

TEORÍA