AVR PRÁCTICA-20

Nombre y apellidos..

1.- Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y $\lambda \in \mathbb{R}$.

1_1.- Explica por que es correcta la definición de $||f||_\infty$ (norma infinita de f) dada por

$$||f||_\infty = \sup\{\, |f(t)| \quad : \quad t \in [a,b]\,\}.$$

UNA FUNCIÓN CONTINUA SOBRE $[a,b]$ ALCANZA SU MÁXIMO, ES DECIR $\exists\, x_0 \in [a,b]$ TAL QUE $|f|(x_0) = \sup\{|f(t)| : t\in[a,b]\} = ||f||_\infty$

$|f|$ CONTINUA

1_2.- Prueba que

- $||f||_\infty = 0$ si y solo si $f = 0$.
- $||\lambda f||_\infty = |\lambda| ||f||_\infty$.
- $||f + g||_\infty ||f||_\infty + ||g||_\infty$.

1) SI $f \equiv 0 \Rightarrow ||f||_\infty = 0$ CLARAMENTE. SI $\exists\, x_0 \in [a,b]$ CON $f(x_0) > 0$

EN TONCES $||f||_\infty \geq |f(x_0)| > 0$.

2) $||\lambda f||_\infty = \sup\{|\lambda f(t)| : t\in[a,b]\} = \sup\{|\lambda||f(t)| : t\in[a,b]\} = |\lambda| \sup\{|f(t)| \ldots$

3) $||f+g||_\infty = \sup\{|f(t)+g(t)| : t\in[a,b]\} \leq \sup\{|f(t)|+|g(t)| : t\in[a,b]\} \leq$

D. TRIANGULAR

$\leq \sup\{|f(t)|\ t\in[a,b]\} + \sup\{|g(t)|\ t\in[a,b]\} = ||f||_\infty + ||g||_\infty$

POR SEPARADO LOS SUPREMOS

1_3.- Prueba que una sucesión $(f_n)_n$ de funciones continua sobre $[a, b]$ converge uniformemente a una función f sobre $[a, b]$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_\infty = 0$.

$f_n \longrightarrow f$ UNIFORMEMENTE EN $[a,b]$ $\Longleftrightarrow$

DEFINICIÓN

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow \sup\{|f(x)-f_n(x)| : x\in[a,b]\} \leq \varepsilon$

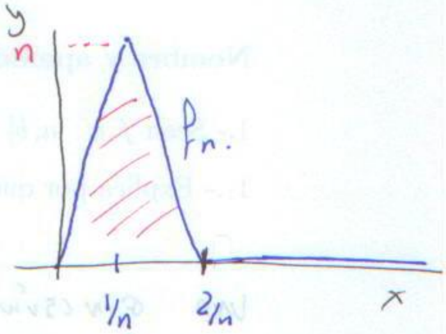
$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow ||f - f_n||_\infty \leq \varepsilon$

$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_\infty = 0.$

DEF DE LÍMITE

2.- Dada la sucesión de funciones $(f_n)_n$ definidas sobre $[0,1]$ por:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si} \quad 0 \le x < 1/n \\ -n^2(x - 2/n) & \text{si} \quad 1/n \le x < 2/n \\ 0 & \text{si} \quad 2/n \le x \le 1. \end{cases}$$



a) Estudia la convergencia uniforme en $[r, 1]$ con $r \ge 0$.
b) Comprueba si $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$.
c) ¿Contradice a) y b) lo que sabemos de teoría?

$\forall x > 0 \ \exists n_0 : n \ge n_0 \Rightarrow \frac{2}{n} < \frac{2}{n_0} < x \Rightarrow f_n(x) = 0.$

LUEGO $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

LÍMITE PUNTUAL, ES $f \equiv 0$.

a) CADA f_n ES CONTINUA, $f \equiv 0$ ES CONTINUA, PERO CLARAMENTE f_n NO CONVERGE UNIFORMEMENTE A $f \equiv 0$ EN $[0,1]$ $\left(\left| 0 - f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = n \right)$.

SI $r > 0$, $\exists n_0$ TAL QUE PARA $n \ge n_0$ $\frac{2}{n} < \frac{2}{n_0} < r \Rightarrow$
$\Rightarrow f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [r,1]$.

LUEGO $f_n \longrightarrow 0$ UNIFORMEMENTE EN $[r,1]$, $r>0$

b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = n \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{2} = 1$, $\int_0^1 0\,dx = 0$.

c) a) Y b) NO CONTRADICEN NADA DE LO QUE SABEMOS YA QUE NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME EN EL INTERVALO $[0,1]$.

3.- Prueba que si f_n converge uniformemente a f y g_n converge uniformemente a g, el producto $f_n g_n$ puede **no** converger uniformemente a fg.

VEAMOS UN EJEMPLO

$f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}$ SI $x \in (0,1]$ $\quad f_n \longrightarrow \frac{1}{x}$ UNIFORMEMENTE EN $(0,1]$

$\left| \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$g_n(x) = \frac{1}{n}$ SI $x \in (0,1]$ $\quad g_n \longrightarrow 0$ UNIFORMEMENTE EN $(0,1]$

$\left| 0 - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$h(x) = \frac{1}{x} \cdot 0 = 0$ ES EL LÍMITE PUNTUAL.

$f_n g_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x \in (0,1]$

AHORA $\frac{1}{n^4} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ Y $f_n g_n\left(\frac{1}{n^4}\right) = \frac{1}{n}\left(n^4 + \frac{1}{n}\right) = n^3 + \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

NO PUEDE HABER CONVERGENCIA UNIFORME EN $(0,1]$.