AVR PRÁCTICA-22

Nombre y apellidos..

1.- Recordemos que $i^2=-1$; si $z=a+bi\in\mathbb{C}$, su conjugado es $\overline{z}=a-bi$ y se tiene que

$$z\overline{z}=|z|^2=a^2+b^2.$$

1_1.- Resuelve la ecuación $(3+2i)z+(7+i)=0$.

$(3+2i)z = -(7+i) = -7-i$

Como $3+2i \neq 0$ $\boxed{z = \frac{-7-i}{3+2i} = \frac{-(7+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{-21-2+i(14-3)}{9+4} = -\frac{23}{13}+\frac{12}{13}i}$

1_2.- Para $z\in\mathbb{C}$, con $|z|=1$ y $z\neq 1$, prueba que $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$.

$z\overline{z} = |z|^2 = 1$ luego el inverso de z, ¡que es único!, es $\frac{1}{z} = \overline{z}$. Por tanto

$z+\frac{1}{z} = z+\overline{z} = (\operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z) + (\operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z) = 2\operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$.

1_3.- Consideramos la sucesión $(z_n)_n = \left(\left(\frac{n+1}{n}, \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n+1}\right)\right)_n \subset\mathbb{C}$. Calcula $\lim_{n\to\infty} z_n$.

$\exists \lim_{n\to\infty} z_n = z = x+y\cdot i \iff \operatorname{Re} z_n = \frac{n+1}{n} \to x$ y $\operatorname{Im} z_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n+1} \to y$

Como $\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ y $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n+1} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2\left(\frac{n+1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^2$

Se sigue que $\lim_{n\to\infty} z_n = z = 1+ie^2$

2.- **Teorema de Identidad**: Sean $g,h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dos funciones derivables en todo $\mathbb{C}$. Supongamos que existe una recta $y=rx+s$ de modo que $g(rx+s)=h(rx+s)$ para todo $x\in\mathbb{R}$, entonces $g(z)=h(z)$ para todo de $z\in\mathbb{C}$.

Sea $a\in\mathbb{R}$, usando el Teorema anterior, prueba que $e^{z+a}=e^ze^a$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

Sea $g(z) = e^{z+a} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+a)^n}_{RC}$ serie de potencias que converge en todo $\mathbb{C}$; por tanto g es derivable

Sea $h(z) = e^ze^a$. e^z es derivable y $e^a\in\mathbb{R}$ es una constante luego h es derivable en todo $\mathbb{C}$

Sea la recta $y=0$, así $g(x) = e^{x+a} \underset{\text{estamos en } \mathbb{R}}{=} e^xe^a$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$h(x) = e^xe^a$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Luego $g(x)=h(x)$ $\forall$ punto de la recta $y=0$ $\underset{\text{Teorema Identidad}}{\Longrightarrow}$ $g(z) = e^{z+a} = e^ze^a = h(z)$ $\forall z\in\mathbb{C}$.

3.- Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con $f(z) = Ref(z) + Imf(z)i$. Para $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ se define la integral

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Ref(t)dt + i\int_a^b Imf(t)dt.$$

Sea $g(t) = \cos t$ si $t \in [-\pi, \pi]$ y $g(t) = 0$ en otro caso. Calcula

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-it}dt.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, \underbrace{e^{-it}}_{\substack{g(t)=0 \\ |t|>\pi}} dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, \underbrace{e^{-it}}_{\text{Fórmula de Euler}} dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \left(\cos t - i \operatorname{sen} t \right) dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t - i \cos t \operatorname{sen} t \, dt \underbrace{=}_{\text{Integración}}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \, dt - i \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \operatorname{sen} t \, dt =$$

(cos t sen t) es impar

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \, dt + 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \, dt \underbrace{=}_{\text{Práctica anterior.}} \pi.$$