# AVR PRÁCTICA-23

**Nombre y apellidos**..........................................................................

1.- Prueba que existe un $x_0 \in (-1,1)$ de modo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^n(-1)^{n+1}}{n} = -\frac{1}{e}$.

La serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ centrada en cero, tiene radio de convergencia 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|x|^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}|x| = |x| \begin{cases} <1 & \text{converge} \\ >1 & \text{diverge} \end{cases}$$

Además como para $[a,b] \subseteq (-1,1)$, tenemos convergencia uniforme, en su dominio $(-1,1)$ la serie converge a una función continua.

Para $x=0$, la serie se anula

Observamos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^{n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\infty$

$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(-1)^{n+1}}{n} \Rightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(-1)^n = 1 - x + x^2 - x^3 \dots \geq 0$

Así $f$ creciente y $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$. Sólo queda aplicar el teorema de Bolzano

2.- ¿La función $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ es creciente en su dominio?

La serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$ tiene por radio de convergencia 1

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{|x|^{2k+3}}{2k+3}}{\frac{x^{2k+1}}{2k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{2k+3}|x|^2 = |x|^2 \begin{cases} <1 & \text{conv.} \\ >1 & \text{diver} \end{cases}$$

Luego $f$ tiene dominio $(-1,1)$, allí es continua y derivable (ya que hay convergencia uniforme en todo $[-r,r] \subseteq (-1,1)$).

Por tanto $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} =$

$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \geq 0$ (luego $f$ es creciente)

Claro $1>0$, si $x \in (-1,1)$, $1-x^2 \geq 0$ $\quad 1-x^2+x^4 \geq 0$

Por inducción si $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k x^{2k} \geq 0$ $(\forall N = 0, 1, \dots, N)$

Si $\begin{cases} N+1 \text{ es par} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{N+1} (-1)^k x^{2k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{N} (-1)^k x^{2k}}_{\geq 0} + \underbrace{x^{2(N+1)}}_{\geq 0} \geq 0 \\ N+1 \text{ es impar} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{N+1} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k x^{2k} + x^{2N} - x^{2N+2} \geq 0 \end{cases}$

3.- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. Si para $x_0 \in [a, b]$ se tiene que $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, prueba que $f$ tiene en $x_0$ un máximo local.

tomamos $P_{2,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0) =$

el polinomio de Taylor de $f$ de orden 2. centrado en $x_0$

$= f(x_0) + f''(x_0)(x-x_0)$

Sabemos que $0 = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - P_{2,x_0}(x)}{(x-x_0)^2} =$

$= \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2} - f''(x_0). \Rightarrow \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2} = f''(x_0) < 0$

luego $\varepsilon = -\frac{f''(x_0)}{2} > 0 \ \exists\, \delta > 0$ tal que si $0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2} < -\dfrac{f''(x_0)}{2}$

así $\forall\ |x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x) - f(x_0) \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \le f(x_0)$ luego $x_0$ es un máximo local

4.- Da un ejemplo de una serie de potencias cuyo radio de convergencia se 4. Justifica tu respuesta.

Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{4^n}$

Calculamos su radio de convergencia usando el criterio del cociente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{4^{n+1}}}{\frac{|x|^n}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}|x| = \frac{1}{4}|x|$$

$$\text{Si } \frac{1}{4}|x| \begin{cases} < 1 \ (\Leftrightarrow |x| < 4) \Rightarrow \text{la serie converge} \\ > 1 \ (\Leftrightarrow |x| > 4) \Rightarrow \text{la serie diverge} \end{cases}$$

Luego el radio de convergencia

$R = \sup\{|x-0| : \sum \frac{x^n}{4^n} \text{ converge}\} = 4$