AVR PRÁCTICA-24

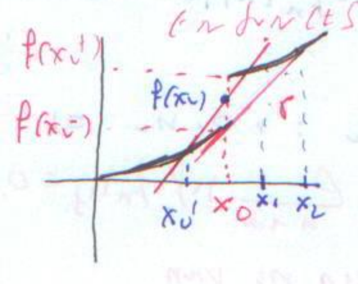
Nombre y apellidos..

1.- Prueba que una función $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ monótona creciente y convexa es continua.

POR SER MONÓTONA CRECIENTE, $\forall x_0 \in [0,\infty)$ $\exists\ f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ Y $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$. SI $f(x_0^-) < f(x_0^+)$, f NO ES CONTINUA EN x_0.

COMO $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$ (f CRECIENTE)

ENTONCES

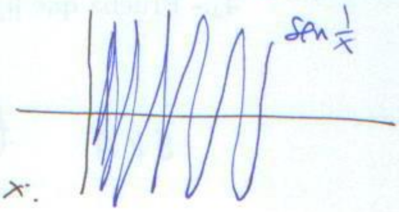


SEAN $x_0 < x_1 < x_2$

- SI $f(x_0^-) = f(x_0)$ LA RECTA QUE UNE $(x_0, f(x_0))$ Y $(x_2, f(x_2))$ VERIFICA QUE $f(x_1) > r(x_1)$.
- SI $f(x_0^-) < f(x_0)$, LA RECTA QUE UNE $(x_0', f(x_0'))$ Y $(x_2, f(x_2))$, VERIFICA QUE $f(x_1) > r(x_1)$

EN CUALQUIER CASO, f NO ES CONVEXA ¡CONTRADICCIÓN!

2.- Encuentra un ejemplo de una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua y acotada que no sea uniformemente continua en (a,b). Justifica tu respuesta.



SEA $(a,b) = (0,1)$ Y $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

f ES CONTINUA, POR SER COMPOSICIÓN DE FUNCIONES CONTINUAS: $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$ Y $\operatorname{sen} x$.

f ESTÁ ACOTADA, $|\operatorname{sen}\frac{1}{x}| \leq 1$

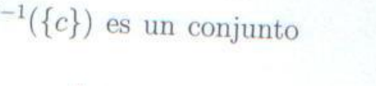
AHORA $x_n = \frac{1}{\pi/2 + 2k\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ Y $\operatorname{sen}\frac{1}{x_n} = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$ $\forall n$.

$y_n = \frac{1}{\pi + 2k\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ Y $\operatorname{sen}\frac{1}{y_n} = \operatorname{sen}(\pi + 2k\pi) = 0$ $\forall n$.

$|x_n - y_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ Y SIN EMBARGO $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$ $\forall n$; NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME.

3.- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea $c \in \mathbb{R}$, prueba que $f^{-1}(\{c\})$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}$.

$f^{-1}(\{c\})$ ES CERRADO EN $\mathbb{R}$ SI $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(\{c\})$ ES UN ABIERTO EN $\mathbb{R}$.



SEA $x \in \mathbb{R} \setminus f^{-1}(\{c\})$. $\Rightarrow f(x) \neq c$

SEA $r < |x - c|$, ASÍ $c \notin (x - r, x + r)$.

OBSERVAMOS QUE $(-\infty, a) \cup (b, \infty) \subseteq \mathbb{R} \setminus f^{-1}(\{c\})$. YA QUE $f^{-1}(c) \subseteq [a,b]$ ESTE CONJUNTO ES ABIERTO. SI $x \in [a,b]$, f CONTINUA EN x, $\exists\ \delta > 0 : \forall\ 0 \leq |x - y| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < r$ LUEGO $f(y) \neq c$ Y ASÍ $(x - \delta, x + \delta) \subseteq \mathbb{R} \setminus f^{-1}(\{c\})$. ACABAMOS DE PROBAR QUE $\mathbb{R} - f^{-1}(\{c\})$ ES ABIERTO Y POR TANTO $f^{-1}(\{c\})$ ES UN CERRADO EN $\mathbb{R}$.

4.- Sobre $C[0,1]=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} \ : \ f \text{ continua}\}$ tenemos dos forma de medir, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \ : \ x\in[0,1]\}$ y $\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|dx$.(Observemos que $f_n\to f$ uniformemente en $[0,1]$ si y solo si $\|f-f_n\|_\infty \to_{n\to\infty} 0$).

4_1.- Prueba que $\|f-f_n\|_\infty \to_{n\to\infty} 0$ implica que $\|f-f_n\|_1 \to_{n\to\infty} 0$.

$\|f-f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 : n\geq n_0 \ |f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$

$\forall x\in[0,1]$,

ASÍ, DADO $\varepsilon>0$, $\|f-f_n\|_1 = \int_0^1 |f(x)-f_n(x)|\,dx \leq$

$\leq \int_0^1 \varepsilon\, dx = \varepsilon.$ LUEGO $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 : n\geq n_0 \Rightarrow$

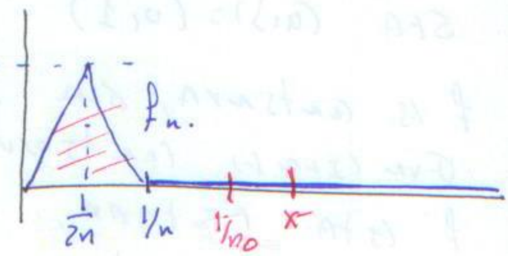
SI $n\geq n_0$

$\|f-f_n\|_1 \leq \varepsilon \iff \lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_1=0$.

DEF. DE CONVERGENCIA DE UNA SUCESIÓN

4_2.- Prueba que $\|f-f_n\|_1 \to_{n\to\infty} 0$ **no** implica que $\|f-f_n\|_\infty \to_{n\to\infty} 0$.

SEA f_n LA FUNCIÓN



$$f_n(x)=\begin{cases} 2nx & \text{SI } x\in[0,\frac{1}{2n}] \\ -2nx+2 & \text{SI } x\in[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}] \\ 0 & \text{SI } x>\frac{1}{n}. \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ PUNTUALMENTE}$$

($f_n(0)=0 \ \forall n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(0)=0$

SI $x>0$, $\exists n_0$ TAL QUE $\frac{1}{n_0}<x$

Y $\forall n\geq n_0 \Rightarrow f_n(x)=0$).

Y ASÍ $\|f_n(x)-0\|_1 = \int_0^1|f_n(x)|\,dx = \frac{1}{2n}. \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ÁREA DEL TRIÁNGULO

AHORA $\|f_n-0\|_\infty \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, YA QUE NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME ($f_n(\frac{1}{2n})=1 \quad \forall n.$)