

AVR PRÁCTICA-25

Nombre y apellidos.....

1.- Sea $f : [a, b]$ una función monótona decreciente. Sean $x_1, x_2 \in [a, b]$, con $x_1 < x_2$. Prueba que existen los límites

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x);$$

y que

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x).$$

2.- Calcula el área de la región del plano

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2] \text{ y } 0 \leq y \leq \frac{x^2}{\sqrt{|1-x|}} \right\}.$$

3.- Sea $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ derivable de modo que

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

para todo $x, y \geq 0$. Prueba que $f(x) = x^p$ para todo $x \geq 0$ y algún p .

(**Indicación:** prueba que $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ es una función constante).

4.- Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones sobre $[0, 1]$ que convergen uniformemente a la función f en el intervalo $[0, 1]$. Prueba que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

para todo $x \in [0, 1]$.

$$5.- \text{ Sea } f_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(n^2-x^2)^2}} & \text{si } x^2 \neq n^2 \\ 0 & \text{si } x^2 = n^2 \end{cases}$$

1. Calcula el límite puntual de la sucesión $(f_n)_n$.
2. Prueba que la sucesión converge uniformemente en $[-M, M]$ si $M > 0$.
3. Prueba que no hay convergencia uniforme en todo \mathbb{R} .

6.- Sea $f(x)$ una función polinómica de grado 3. Se sabe que la recta $y = 2$ es la tangente a la gráfica de f por el punto $(0, 2)$. También se sabe que $\int_0^2 f(x)dx = 8$ y que f tiene un punto de inflexión en $x = 1$. ¿Cuántas raíces reales tiene la ecuación $f(x) = 0$?