ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

EL MONSTRUO DE WEIERSTRASS.

Las series de funciones nos permiten dar un ejemplo, al principio al menos, un tanto sorprendente.

Para $x \in \mathbb{R}$ definimos la distancia de x a $\mathbb{Z}$ por

$$[x] = \text{distancia}(x, \mathbb{Z}) = \text{mín}\{|x - z| \ : \ z \in \mathbb{Z}\}.$$

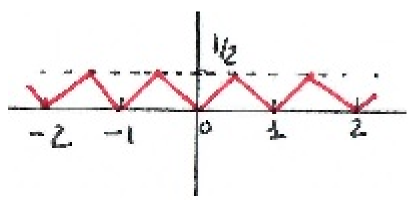

FIGURA 1. Gráfica de $[x]$.

Es una función continua en todo $\mathbb{R}$. No es derivable es los puntos de la forma $x = \frac{k}{2}$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Definimos las funciones f_n por

$$f_n(x) = \frac{1}{10^n}[10^n x] \qquad \text{para} \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \text{y para todo} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

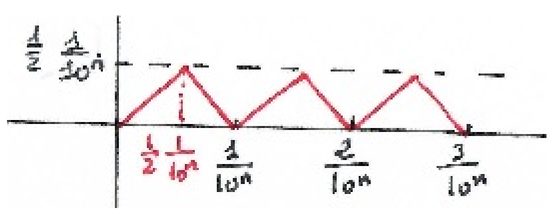

FIGURA 2. Gráfica de f_n.

Son de nuevo funciones continuas en todo $\mathbb{R}$, no derivables en los puntos $x = \frac{k}{2}\frac{1}{10^n}$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema. 1. *La función*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}[10^n x]$$

es continua en todo $\mathbb{R}$, pero no es derivable en ningún punto de $\mathbb{R}$.

Demostración: Si aplicamos la prueba M-Weierstrass,

$$|f_n(x)|<\frac{1}{10^n} \qquad \text{para todo} \qquad x\in\mathbb{R};$$

y como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}<\infty$, llegamos a que la serie de funciones converge uniformemente a su límite puntual f en todo $\mathbb{R}$. De la convergencia uniforme deducimos también que f es continua en toda la recta.

Observemos que todas las funciones f_n so 1-periódicas y por tanto f también lo es.

Para ver que f no es derivable en ningún punto de $\mathbb{R}$, fijamos $a\in\mathbb{R}$, vamos a encontrar una sucesión particular $(h_m)_m$ convergente a cero de modo que **no existe**

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}.$$

Como f es 1-periódica, es suficiente con tomar $a\in(0,1]$. Este a lo escribimos en forma decimal

$$a=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{10^m}$$

(ver el artículo de Aplicaciones de Series numéricas). Observemos que

$$\frac{1}{2}=0,5=0,49999999.......$$

Definimos la sucesión $(h_m)_m$ por

$$h_m=\tfrac{1}{10^m} \quad \text{si} \quad a_m\neq 4 \text{ ó } 9;$$

$$h_m=-\tfrac{1}{10^m} \quad \text{si} \quad a_m=4 \text{ ó } 9.$$

Claramente es una sucesión que converge a cero. Además

$$\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}\frac{[10^n(a+h_m)]-[10^n a]}{\pm 10^{-m}}=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\pm 10^{m-n}\left([10^n(a+h_m)]-[10^n a]\right)=\sum_{n=1}^{m-1}\pm 10^{m-n}\left([10^n(a+h_m)]-[10^n a]\right).$$

La última igualdad viene de que si $n\geq m$, entonces $10^n h_m$ es entero, como la función $[x]$ es 1-periódica, se tiene que $[10^n(a+h_m)]=[10^n a]$.

Por otra parte, para $n < m$, podemos escribir

$$10^n a = \text{entero} + 0, a_{n+1}\, a_{n+2}\, ...a_m....$$

$$10^n (a + h_m) = \text{entero} + 0, a_{n+1}\, a_{n+2}\, ...(a_m \pm 1).....$$

Supongamos que

$$0, a_{n+1}\, a_{n+2}\, ...a_m.... \leq 1/2 = 0,499999999.....,$$

entonces por la elección de h_m

$$0, a_{n+1}\, a_{n+2}\, ...(a_m \pm 1).... \leq 1/2 = 0,499999999......$$

Lo cuál significa que

$$[10^n (a + h_m)] - [10^n a] = \pm 10^{n-m}$$

y así

$$10^{m-n} \left([10^n (a + h_m)] - [10^n a] \right) = \pm 1.$$

De forma análoga, si suponemos que

$$0, a_{n+1}\, a_{n+2}\, ...a_m.... > 1/2 = 0,499999999.....,$$

entonces por la elección de h_m

$$0, a_{n+1}\, a_{n+2}\, ...(a_m \pm 1).... > 1/2 = 0,499999999......$$

Lo cuál significa que

$$[10^n (a + h_m)] - [10^n a] = \pm 10^{n-m}$$

y así

$$10^{m-n} \left([10^n (a + h_m)] - [10^n a] \right) = \pm 1.$$

Lo que hemos es que

$$\frac{f(a + h_m) - f(a)}{h_m}$$

es la suma de $m - 1$ números, cada uno de los cuáles es 1 ó -1. Ahora al sumar a un entero un 1 ó -1 cambia la paridad del número (pasa de ser par a impar o viceversa). En consecuencia la sucesión de cociente

$$\frac{f(a + h_m) - f(a)}{h_m}$$

no puede converger ya que es una sucesión de enteros alternativamente pares e impares □

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`