ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

SERIES DE POTENCIAS.

Las series de Taylor son un caso particular de **Series de Potencias**.

Definición. 1. *Dada una sucesión* $(a_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *y un número real* $a \in \mathbb{R}$, *se llama* ***serie de potencias*** *centrada en "a" a la expresión*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k.$$

La serie de Taylor de una función f es una serie de potencias (y diceversa, pero eso lo vemos después) donde $a_k = \frac{f^{k)}(a)}{k!}$. Por otro lado, todo serie de potencias al menos converge para $x = a$.

Una serie de potencia la podemos ver como una función

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = f(x).$$

Visto así nos interesa el dominio de esta función, es decir para que valores de x converge la serie.

Ejemplos. 1.

- *El dominio de* $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ *es todo* $\mathbb{R}$.
- *El dominio de* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ *es* $[-1, 1]$ *y allí coincide con la* $\arctan x$ *como vimos en un artículo anterior.*
- *El dominio de* $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$ *solo es* $x = 0$.

En general se tiene el siguiente resultado.

Teorema. 1. *Sea una serie de potencias*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = f(x),$$

de modo que $y \in Domf$, *y sea un real positivo* $0 < r < |y-a|$, *entonces*

- $[a-r, a+r] \subset Domf$, *es decir la serie de potencias converge para todo* x *de modo que* $|x-a| \leq r$; *además lo hace absolutamente.*

- *La serie de potencias converge a f uniformemente en $[a-r, a+r]$, para todo $0 \leq r < |a-y|$.*
- *Existe* $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$ *para todo x de modo que $|x-a| \leq r$.*
- *f' es el límite uniforme de $\sum_{k=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$ en $[a-r, a+r]$, para todo $0 \leq r < |a-y|$.*

Demostración: Como la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (y-a)^k$ es convergente, tenemos que

$$\lim_{k \to \infty} a_k (y-a)^k = 0$$

y así existe $M > 0$ de modo que

$$|a_k||(y-a)|^k < M \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ahora si $|x-a| \leq r < |y-a|$, así $\frac{|x-a|}{|y-a|} = s < 1$, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k||(x-a)|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k||(y-a)|^k (\frac{|x-a|}{|y-a|})^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} M s^k < \infty$$

ya que la serie geométrica es convergente. Luego por el Criterio de comparación nuestra serie es absolutamente convergente y por tanto la serie es convergente (hay que repasar los Criterios de Convergencia de Series en el Tema de Series). Además, la Prueba M-Weierstrass nos asegura que la convergencia es uniforme.

Ahora observemos que para x_0, con $r < |x_0 - a| < |y-a|$, se sigue que

$$|k a_k (x_0 - a)^{k-1}| \leq k|a_k| \frac{1}{r} |x_0 - a|^k \leq k|a_k| \frac{1}{r} |y-a|^k \frac{|x_0 - a|^k}{|y-a|^k} \leq \frac{M}{r} k s^k,$$

donde $s = \frac{|x_0 - a|}{|y-a|} < 1$. Como la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k s^k < \infty$ (ya que $0 < s < 1$, compruebalo), entonces la serie de pontencias

$$\sum_{k=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

converge en x_0 y aplicando la demostración anterior, la serie de potencias de derivadas converge absolutamente y uniformemente en $[a-r, a+r]$.

Observemos que esta última serie es la derivada formal, término a término, de la serie de potencias de partida. De nuevo, la Prueba M-Weierstrass nos dice que esta convergencia es uniforme. Ahora el Teorema sobre al derivada y la convergencia uniforme nos dice que efectivamente

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} \qquad \square$$

$\square$

Observación. 1. *Si* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, *existe su derivada y es otra serie de potencias* $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1}$, *con* $f'(a) = a_1$, *luego existe* f'' *y el resto de derivadas sucesivas, que son series de potencias con* $f^{k)}(a) = a_k k!$. *Así la serie de Taylor de una función, que viene dada por una serie de potencias, existe y coincide con la serie de potencias.*

El Teorema anterior también nos dice que si una función viene dada por una serie de potencias, entonces su dominio es un punto, un intervalo o bien toda la recta real.

Definición. 2. *Dada una serie de potencias* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, *se llama* ***radio de convergencia*** *de la serie al número*

$$R = \sup\{\, |y-a| \; : \; \sum_{k=0}^{\infty} a_k(y-a)^k \qquad \textit{es convergente}\,\}.$$

R al menos es *cero* ya que para $y = a$ la serie converge. Además del Teorema anterior tenemos que

Teorema. 2. *Dada una serie de potencias* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, *entonces o bien*

- $R = 0$, *o bien*
- $R > 0$ *y para todo* $0 < r < R$ *la serie* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, *converge absolutamente para todo* $x \in [a-r, a+r]$, *y por tanto para todo* $x \in (a-R, a+R)$ *(la convergencia en* $[a-r, a+ar]$ *es uniforme); o bien*
- $R = \infty$.

Demostración: Es una aplicación del Teorema anterior □

Ejemplo. 1. *Nos dan la serie* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{3^k}$. *¿Cuál es radio de convergencia de la serie? ¿Cuál es el dominio de* f*?*

Demostración: Echamos mano del Criterio de Cociente, para ver para que valores de x la serie converge. Así

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{|x-2|^{k+1}}{3^{k+1}}}{\frac{|x-2|^k}{3^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x-2|}{3} = \frac{|x-2|}{3}.$$

Así el criterio de cocientes nos dice que si

- $\frac{|x-2|}{3} < 1$, la serie converge absolutamente (equivalente a $|x-2| < 3$);
- $\frac{|x-2|}{3} > 1$, la serie diverge.

Luego por el Teorema anterior el radio de convergencia que buscamos es $R = 3$. Por oto lado, para

- $x = 5$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty; \qquad \text{y para}$$
- $x = -1$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$
la serie diverge.

Luego concluimos que $\mathrm{Dom} f = (-1, 5)$ $\square$

Por último damos la siguiente definición.

Definición. 3. *Un función f se llama **analítica** en un entorno del punto a si se puede representar como una serie de potencias centrada en a, es decir existe $\delta > 0$ de modo que para todo $|x-a| < \delta$ se tiene que*
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

Ejemplo. 2. *Ejemplos de funciones análiticas son:*

- e^x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$*...etc en toda la recta* $\mathbb{R}$.
- $\arctan x$*, en un entorno de cero o* $\ln x$ *en un entorno de* 1*, también son ejemplos de funciones analíticas.*

El concepto de función analítica alcanza su mayor poder cuando trabajamos con funciones de variable compleja.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es