AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

LA DERIVADA Y LA CONVERGENCIA DE FUNCIONES.

El comportamiento de la convergencia uniforme respecto de la derivada es un poco más complejo de lo que pasa para la continuidad y la integral.

Ejercicio 1. *Sea la sucesión de funciones* $f_n(x) = \begin{cases} -x & si \quad x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & si \quad x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ x & si \quad x \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$

Prueba que son funciones derivables y que sus gráficas como las del dibujo siguiente.

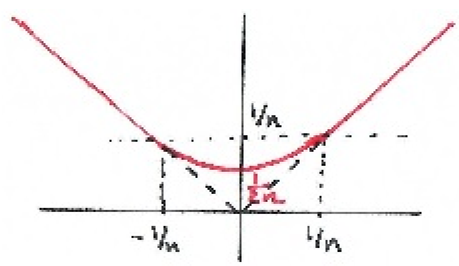

Figura 1. Gráfica de f_n.

Claramente $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = |x|$. Y no lleva mucho esfuerzo comprobar que la convergencia a $|x|$ es uniforme en todo $\mathbb{R}$. Sin embargo la función $|x|$ no es derivable en $x = 0$. No se conserva la derivabilidad.

Ejemplo 1. *Consideramos la sucesión de funciones* $f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(n^2x)$. *Ocurre que*

- *Cada f_n es derivable, $f_n'(x) = n\cos(n^2x)$.*
- *La sucesión $(f_n)_n$ converge uniformemente a $f = 0$ en todo $\mathbb{R}$.*
- *El límite uniforme $f = 0$ es una función derivable.*
- ***No*** *es cierto que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(0).$$

Demostración: Observemos que $|\frac{1}{n}\operatorname{sen}(n^2x)| \leq \frac{1}{n} \to_{n\to\infty} 0$.

Además para $x = 0$, $f_n'(0) = n$ y $f'(0) = 0$ $\square$

Un último ejemplo. Consideremos la sucsión de funciones (f_n) dada por las siguientes gráficas

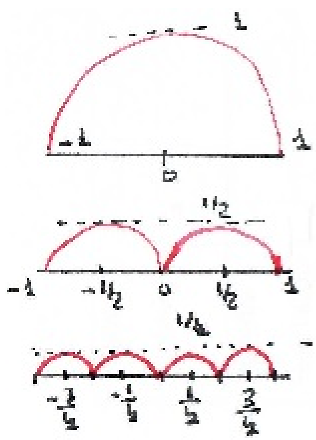

Figura 2. Gráfica de f_1, f_2 y f_3.

Todas ellas tienen la misma longitud π. Es decir, $\pi = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+(f_n')^2(x)}dx$. Esta sucesión de funciones claramente converge uniformemente a $f = 0$. Si fuese cierto que la sucesión de derivadas $(f_n')_n$ convergiese a $f'(x) = 0$ uniformemente, entonces tendríamos que

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+(f_n')^2(x)}dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+0}dx = 2,$$

lo cuál **no** es posible.

Los ejemplos anteriores nos indican que, para dar un Teorema que nos asegure la conservación de la derivada por paso al límite de una sucesión de funciones, hay que dar hipótesis suplementarias.

Teorema 1. *Sea $(f_n)_n$ una sucsión de funciones derivables, con derivadas integrables en $[a, b]$. Supongamos que $(f_n)_n$ converge puntualmente a una función f en $[a, b]$. Supongamos también que la sucesión de derivadas $(f'_n)_n$ converge uniformemente a una función continua g en $[a, b]$. Entonces f es derivable y*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Ejercicio 2. *Mira en los ejemplos anteriores las hipótesis que no se cumplen.*

Demostración: (del Teorema) Por ser f'_n integrables y por converger uniformemente tenemos que

$$\int_a^x g = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f'_n =$$

por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\lim_{n\to\infty} [f_n(x) - f_n(a)] = f(x) - f(a).$$

Por ser g continua y el Teorema Fundamental del Cálculo

$$f'(x) = \left(f(a) + \int_a^x g\right)' = g(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) \qquad \square$$

Este Teorema, de demostración tan elegante, tiene como defecto las muchas hipótesis que se requieren. Vamos a dar un Teorema análogo, con menos hipótesis, pero la demostraicón será algo más compleja.

Para hacer lo que sigue necesitamos un Criterio para caracterizar la convergencia uniforme.

Teorema 2. *(**Criterio de Cauchy de la Convergencia Uniforme**). Sea una sucesión de funciones $(f_n)_n$ definidas en $A \subset \mathbb{R}$. La sucesión de funciones converge uniformemente en A si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $n, m \geq N$ se tiene que*

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

para todo $x \in A$.

Observemos que par dar el Criterio no necesitamos nombrar al límite puntual.

Demostración: Si la sucesión (f_n) converge uniformemente, lo hará sobre cierta función f (su límite puntual). Así, por definición de convergencia uniforme, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $n \geq N$ se sigue que

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

para todo $x \in A$. Así, para $n, m \geq N$ tenemos que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para todo $x \in A$.

Veamos ahora el recíproco. Supuesto cierto el criterio y fijado $x \in A$, el criterio nos dice que la sucesión $(f_n(x))_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$; por tanto convergente. Es decir, para $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $n, m \geq N$ se tiene que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

para todo $x \in A$. Si fijamos $x \in A$, lo anterior nos dice que existe

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

(llamamos $f(x)$ al límite puntual). Además, si $m, n \geq N$ y tomando el límite en m

$$\begin{array}{rcl} |f_m(x) - f_n(x)| & \leq & \epsilon \\ & \downarrow_{m\to\infty} & \\ |f(x) - f_n(x)| & \leq & \epsilon. \end{array}$$

Luego, para todo $n \geq N$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon,$$

para todo $x \in A$. Lo que prueba que $(f_n)_n$ converge uniformemente a f $\square$

Ahora estamos en condiciones de dar un resultado con muchas menos hipótesis que él dado anteriormente.

Teorema 3. *Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones sobre un intervalo $[a,b]$. Supongamos que existe $x_0 \in [a,b]$ de modo que existe el límite (puntual)*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

Si cada f_n es derivable y la sucesión de derivadas $(f_n')_n$ convergen uniformemente a una función g en $[a,b]$, entonces $(f_n)_n$ converge uniformemente a una función f (límite puntual), de modo que f es derivable en $[a,b]$ y se verifica que

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x).$$

Demostración: Sean $x \in [a,b]$ y $m, n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema del Valor Medio a $f_m - f_n$, x y x_0, existe y entre x y x_0 de modo que

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(x_0) - f_n(x_0) + (x - x_0)(\, f_m'(y) - f_n'(y)\,).$$

De aquí

$$\sup\{\, |f_m(x) - f_n(x)| \ : \ x \in [a,b]\,\} \leq$$
$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| + (b-a)\sup\{\, |f_m'(y) - f_n'(y)| \ : \ y \in [a,b]\,\}.$$

Como $f_n(x_0) \to_{n\to\infty} f(x_0)$ (así la sucesión $(f_n(x_0))_n$ es de Cauchy) y la sucesión $(f_n')_n$ verifica el Criterio de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que para $m, n \geq N$ se verifica que:

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

y

$$|f_m'(y) - f_n'(y)| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} \qquad \text{para todo} \qquad y \in [a,b].$$

De lo que se sigue que

$$\sup\{\, |f_m(x) - f_n(x)| \ : \ x \in [a,b]\,\} \leq \epsilon.$$

Así por el Criterio de Cauchy de la Convergencia Uniforme la sucesión $(f_n)_n$ converge uniformemente en todo $[a,b]$ a su límite puntual que llamaremos f,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{uniformemente en} \qquad [a,b].$$

Además, puesto que cada función f_n es continua en [a,b], el límite puntual f es una función continua en $[a,b]$.

Tomamos ahora $c, x \in [a, b]$ y para $m, n \in \mathbb{N}$. Aplicamos el Teorema del Valor Medio a $f_m - f_n$ y así

$$(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(c) = (x - c)(f_m - f_n)'(y),$$

para cierto y entre c y x. De lo que se sigue que

$$\left| \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \right| \leq$$

$$\sup\{ \, |(f_m - f_n)'(y)| \; : \; y \in [a, b] \, \}.$$

De nuevo por la convergencia uniforme de $(f_n')_n$, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que para $m, n \geq N$ se verifica que:

$$\left| \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \right| \leq \epsilon \qquad \text{claro} \qquad c \neq x.$$

Ahora, tomando límite para $m \to \infty$, se tiene que

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \right| \leq \epsilon \qquad\qquad c \neq x,$$

y $n \geq N$. Como $g(c) = \lim_{n\to\infty} f_n'(c)$, existe $N' \in \mathbb{N}$ de modo si $n \geq N'$

$$|f_n'(c) - g(c)| < \epsilon.$$

Ahora fijamos $K = \max\{N, N'\}$. Puesto que $f_K'(c)$ existe, para el ϵ anterior existe $\delta > 0$ de modo que para $0 < |x - c| < \delta$ se tiene que

$$\left| \frac{f_K(x) - f_K(c)}{x - c} - f_K'(c) \right| \leq \epsilon.$$

Al combinar las últimas desigualdades, se concluye que si $0 < |x - c| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{f(x) - (c)}{x - c} - g(c) \right| \leq$$

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \frac{f_K(x) - f_K(c)}{x - c} \right| +$$

$$\left| \frac{f_K(x) - f_K(c)}{x - c} - f_K'(c) \right| + |f_K'(c) - g(c)| \leq 3\epsilon.$$

Lo que quiere decir que existe

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = g(c) \qquad \square$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es