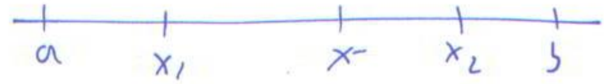
PROBLEMA 1



$x_1 \le x \le x_2 \implies f(x_1) \ge f(x) \ge f(x_2)$

f monótona decreciente

Como $A = \{ f(x) : x_2 > x > x_1 \}$ está acotado por $f(x_1)$

existe $\sup A = \alpha$

Como $B = \{ f(x) : x_2 < x < x_2 \}$ está acotado por $f(x_2)$

existe $\inf B = \beta$

Claramente $\beta \le \alpha$.

Veamos que $\lim_{x \to x_1^+} f(x) = \alpha$ y que $\lim_{x \to x_2^-} f(x) = \beta$

•) Sea $\varepsilon > 0$, $\alpha - \varepsilon$ no es supremo de A

luego $\exists\, x_0 \in (x_1, x_2)$ con $\alpha \ge f(x_0) > \alpha - \varepsilon$

Sea $\delta = |x_1 - x_0|$, si $0 < x - x_1 < |x_1 - x_0| = \delta$

así

$(\Rightarrow x_1 < x < x_0)$

$f(x_1) \ge \alpha \ge f(x) \ge f(x_0) \ge \alpha - \varepsilon$

luego $\boxed{|f(x) - \alpha| < \varepsilon.}$

••) De forma análoga sea $\varepsilon > 0$, $\beta + \varepsilon$ no es ínfimo de A luego $\exists\, y_0 \in (x_1, x_2)$ con

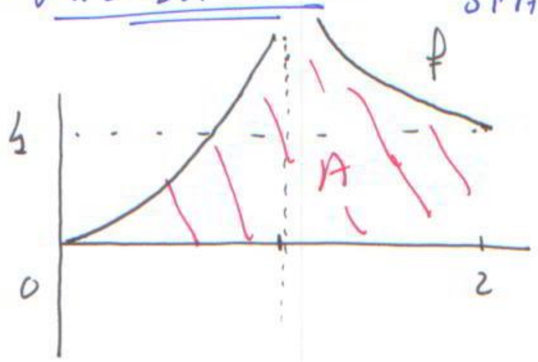
$\beta + \varepsilon > f(y_0) \ge \beta$

Sea $\delta = |y_0 - x_2|$ si $0 < x_2 - y < \delta = |y_0 - x_2|$

$(\Rightarrow y_0 < y < x_2)$ se sigue que

$\beta + \varepsilon > f(y_0) > f(y) \ge \beta \implies |f(y) - \beta| < \varepsilon.$

PROBLEMA 2: SEA $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{|1-x|}}$



$$\text{Área } A = \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{|1-x|}}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx + \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

EN AMBOS CASOS ESTAMOS ANTE INTEGRALES IMPROPIAS.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx \underset{y=\sqrt{1-x}}{=} -2\int x^2 \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\,dx =$$

$$dy = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\,dx$$

$$1-y^2 = x$$

$$= -2\int (1-y^2)^2\,dx = -2\int y^4 - 2y^2 + 1\,dy =$$

$$= -2\frac{y^5}{5} + 4\frac{y^3}{3} - 2y =$$

$$= -2\frac{(\sqrt{1-x})^5}{5} + 4\frac{(\sqrt{1-x})^3}{3} - 2\sqrt{1-x}\,\Big|_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{4}{3} + 2 = \frac{6}{15} - \frac{20}{15} + \frac{30}{15} = \frac{16}{15}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\,dx \underset{y=\sqrt{x-1}}{=} 2\int x^2 \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,dx =$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,dx$$

$$y^2+1 = x$$

$$= 2\int (1+y^2)^2\,dy = 2\int y^4 + 2y^2 + 1\,dy = 2\frac{y^5}{5} + 4\frac{y^3}{3} + 2y =$$

$$= 2\frac{(\sqrt{x-1})^5}{5} + 4\frac{(\sqrt{x-1})^3}{3} + 2\sqrt{x-1}\,\Big|_1^2 = \frac{2}{5} + \frac{4}{3} + 2 = \frac{56}{15}$$

LUEGO EL ÁREA ES $\dfrac{16}{15} + \dfrac{56}{15} = \dfrac{72}{15} = \dfrac{24}{5}$ //

PROBLEMA 3:

SEA y FIJO $\quad g(x) = f(xy) \Rightarrow g'(x) = y\, f'(xy).$

$h(x) = f(x) f(y) \Rightarrow h'(x) = f'(x) f(y).$

AMBAS DERIVADAS SON IGUALES LUEGO

$$y\, f'(xy) = f'(x) f(y) \quad \text{ASÍ}$$

$$\frac{y\, f'(x,y)}{f(y)} = f'(x)$$

TOMANDO $x = 1$ $\quad \dfrac{y\, f'(y)}{f(y)} = \underbrace{f'(1)}_{} = \underset{\text{DIGAMOS } (\gamma)}{\rho} \quad \forall y$

AHORA $\quad \dfrac{y\, f'(y)}{f(y)} = \rho \Rightarrow \dfrac{f'(y)}{f(y)} = \dfrac{\rho}{y}$

INTEGRANDO $\quad \displaystyle\int \frac{f'(y)}{f(y)} = \int \frac{\rho}{y}$

$$\Leftrightarrow \ln|f(y)| = \rho \ln|y| + k$$

LUEGO $\quad |f(y)| = e^{\ln(|y|^{\rho}) + k} = |y|^{\rho} \cdot e^{k}$

COMO $f(y) > 0$ y $y > 0$ TENEMOS

$$f(y) = y^{\rho} e^{k}$$

AHORA $\quad f(xy) = (xy)^{\rho} e^{k} = f(x) f(y) = x^{\rho} y^{\rho} e^{k} e^{k}$

$\Rightarrow e^{k} = e^{2k}$ LUEGO $k = 0.$

— o —

Problema 4:] $f_n \to f$ uniformemente en $[0,\infty)$

$\underset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : n \geq n_0$ se tiene que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x > 0$$

En particular para x fijo, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : n \geq n_0$

se tiene $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\iff$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

def de convergencia de una sucesión

Problema 5:] 1:] Límite puntual.

Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $n_0 > x$

Se tiene $\forall n \geq n_0$

$$f_n(x) = e^{-\frac{1}{(n^2-x^2)^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\frac{1}{(n^2-x^2)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Luego $f = 1$ es el límite puntual de la sucesión

2:] Sea $|x| \leq M$ (ó $x \in [-M, M]$) entonces

$$|x|^2 \leq M^2 \Rightarrow n^2 - M^2 \leq n^2 - x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n^2-x^2)^2} \leq \frac{1}{(n^2-M^2)^2}$$

y que $-\frac{1}{(n^2-M^2)^2} \leq -\frac{1}{(n^2-x^2)^2}$

Luego $e^{-\frac{1}{(n^2-M^2)^2}} \leq e^{-\frac{1}{(n^2-x^2)^2}}$

Por tanto $1 - e^{-\frac{1}{(n^2-x^2)^2}} \leq 1 - e^{-\frac{1}{(n^2-M^2)^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

independientemente de x ($f_n \to 1$ uniforme en $[-M, M]$)

3:] $f_n(n) = 0 \;\; \forall n$ luego $|1 - f_n(n)| = 1 \;\; \forall n$, luego no puede haber conv. uniforme en todo $\mathbb{R}$

PROBLEMA 6:] $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

SABEMOS QUE $f(0) = 2 \Rightarrow d = 2$
(YA QUE LA GRÁFICA DE f PASA POR
$(0,2)$).

ADEMÁS $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. y $f'(0) = 0$

LUEGO $c = 0$ (YA QUE LA PENDIENTE DE
$y = 0$ ES CERO).

$f''(x) = 6ax + 2b$. y COMO $x = 1$ ES UN
PUNTO DE INFLEXIÓN $0 = f''(1) = 6a + 2b$.

POR OTRO LADO $8 = \int_0^2 ax^3 + bx^2 + 2\,dx =$

$$= a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3} + 2x \Big|_0^2 = 4a + \frac{8b}{3} + 4$$

LUEGO
$$\begin{cases} a + \dfrac{2b}{3} + 1 = 2 \\ 6a + 2b = 0 \end{cases}$$

$b = -3a$ ASÍ $a - \frac{2(3a)}{3} = 1$

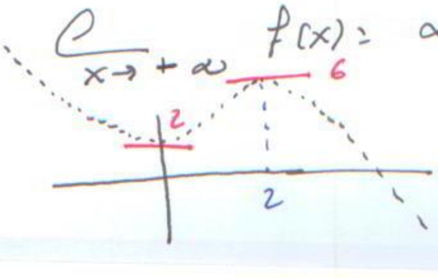
$\Rightarrow a = -1, \; b = 3$

EL POLINOMIO BUSCADO ES $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$

DERIVANDO $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x+2)$.

$f'(x) = 0 \iff x = 0$ ó $x = 2$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$; $f(0) = 2$, $f(2) = 6$



POR EL TEOREMA DE BOLZANO
f SÓLO TIENE UNA ÚNICA
RAÍZ REAL