EXAMEN DE 2º PARCIAL. ANÁLISIS DE VARIABLE REAL (m5).

16 de Mayo de 2023.

1.- (1 punto). Prueba, usanso solo definiciones (en particular la definición de continuidad), que la función $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$ es continua en $x = 2$.

2.- (1 punto). Encuentra los máximos y mínimos globales y relativos de la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x & \text{si} \quad x \in (1,7) \\ x^2 - 18x + \frac{244}{3} & \text{si} \quad x \geq 7. \end{cases}$$

3.- (1 punto). Sea $[x] = \text{máx}\{\, z \in \mathbb{Z} \quad : \quad z \leq x\,\}$, la parte entera de x. Determina si existe $\int_0^3 [x]dx$ y calcula la integral.

4.- (1 punto). Calcula $\displaystyle\int \text{arcsh} x dx$ (arcoseno hiperbólico).

5.- (1 punto). Estudia la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x^2}} \text{sen}\, \frac{1}{x} dx.$

6.- (1 punto). Representa la gráfica de la función $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} e^{-t^2} dt.$

7.- (1 punto). Sea $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n x^{n-1}$. Cálcula $\int_0^1 f(x)dx$.

8.- (1 punto). Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones continuas en el intervalo $[0,1]$. Esta sucesión verifica que para todo $\epsilon > 0$ existe un n_0 de modo que si $n, m \geq n_0$ se verifica que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon,$$

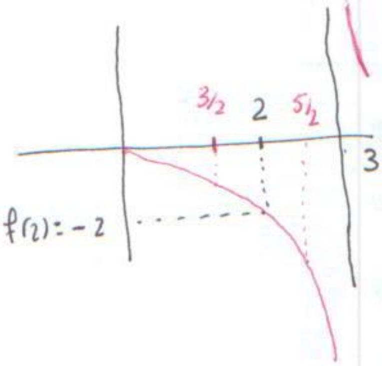
para todo $x \in [0,1]$. Prueba que la sucesión converge uniformemente.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

Revisión del examen: Lunes 22 de Mayo a las 9h en el despacho 484. **No** es obligatorio acudir a la revisión.

PROBLEMA 1:

$f(x) = \dfrac{x}{x-3}$ ¿continua en $x=2$?



Como $f(2) = \dfrac{2}{2-3} = -2$, tenemos que mostrar que $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x-2| < \delta$, entonces

$$|f(2) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ahora $|f(2) - f(x)| = \left| -2 - \dfrac{x}{x-3} \right| =$

$$= \left| \frac{-2x + 6 - x}{x-3} \right| = \left| \frac{-3x+6}{x-3} \right| =$$

$$= \frac{3|2-x|}{|x-3|} \leq 6|x-2| \quad (*)$$

si $|x-3| > \frac{1}{2}$

Luego si $\delta < \min\{\frac{\varepsilon}{6}, 1/2\}$, y $|x-2| < \delta$, entonces

entonces $|x-2| < 1/2 \iff x \in (2 - 1/2, 2 + \frac{1}{2})$.

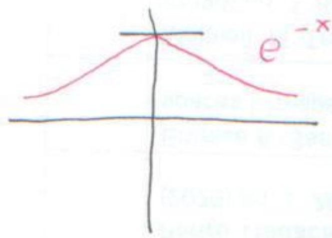
Luego $|x-3| > |\frac{5}{2} - 3| = \frac{1}{2}$

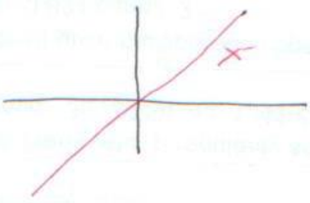
y además $6|x-2| < 6\frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon$

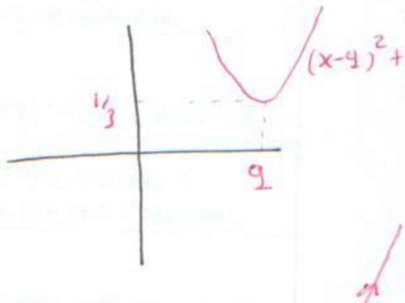
usando $(*)$ $\left| -2 - \dfrac{x}{x-3} \right| < \varepsilon$.

PROBLEMA 2:

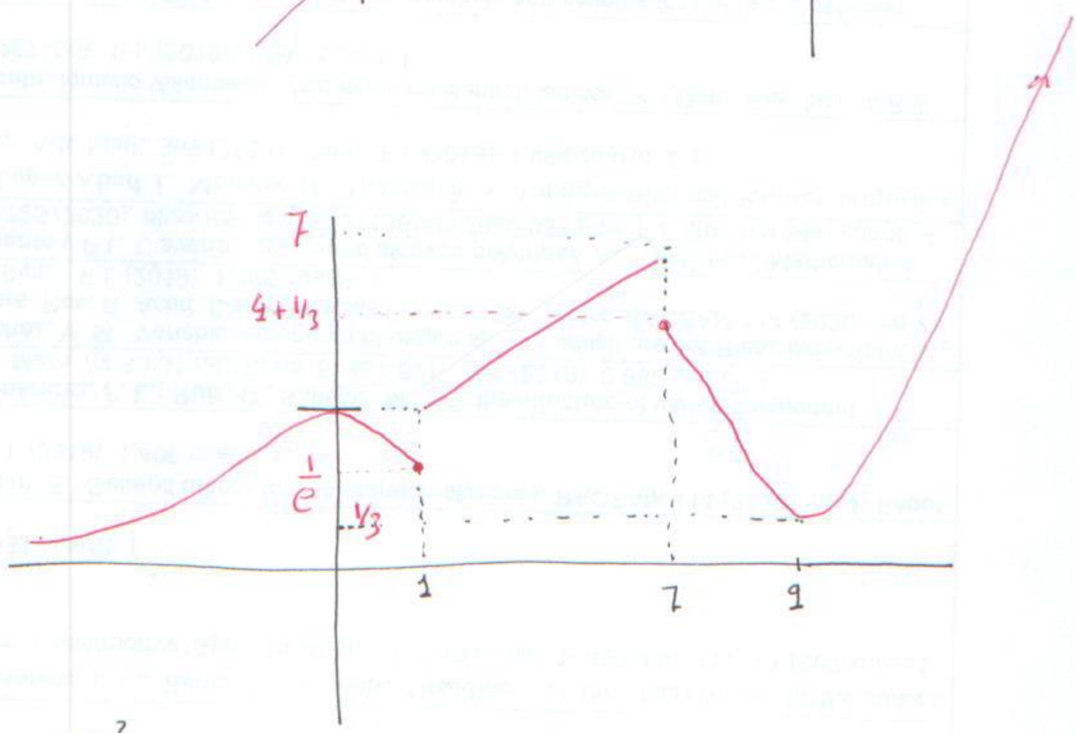
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x \in (1,7) \\ x^2 - 18x + \frac{244}{3} = (x-9)^2 + \frac{1}{3} & \text{si } x \geq 7. \end{cases}$$







ASÍ



$$f'(x) = \begin{cases} -2x e^{-x^2} & x < 1 \\ 1 & x \in (1,7) \\ 2(x-9) & x > 7. \end{cases}$$

$f'(x) = 0$ si $x = 0$ ó $x = 9$

$x = 1$ y $x = 7$ puntos de discontinuidad.

$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, luego no hay mínimo global

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x-9)^2 + 1/3 = \infty$ luego no hay máximo global.

$x = 0$ máximo relativo ($f'(x) > 0$ si $x < 0$ y $f'(x) > 0$ $x > 0$, $x \approx 0$)

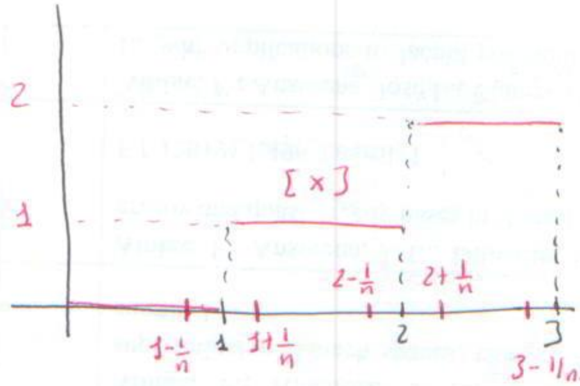
$x = 1$ $f(1) = \frac{1}{e}$, $f'(x) < 0$ si $x < 1$ $x \approx 1$ y $f(x) > 1$ si $x > 1$ $x \approx 1$

mínimo local

$x = 7$ no es ni máximo ni mínimo local

$x = 9$ mínimo local (vértice de una parábola)

PROBLEMA 3:



SEA $P_n = \{0,\ 1-\frac{1}{n},\ 1+1/n,\ 2-\frac{1}{n},\ 2+\frac{1}{n},\ 3-\frac{1}{n},\ 3\}$ PARTICIÓN DEL INTERVALO $[0,3]$

$$S([x],P_n) = 1\times\left[1+\tfrac{1}{n}-\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\right] + 1\times\left[2-\tfrac{1}{n}-\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\right] +$$
$$+\ 2\left[2+\tfrac{1}{n}-\left(2-\tfrac{1}{n}\right)\right] + 2\times\left(3-\tfrac{1}{n}-\left(2+\tfrac{1}{n}\right)\right) +$$
$$+\ 2\left(3-\left(3-\tfrac{1}{n}\right)\right) =$$
$$= \cancel{\tfrac{2}{n}} + 1 - \cancel{\tfrac{2}{n}} + \cancel{2\,\tfrac{2}{n}} + 2\left(1-\cancel{\tfrac{2}{n}}\right) + \tfrac{2}{n}$$
$$= 1 + 2 + \tfrac{2}{n}.$$

$$I([x],P_n) = 1\times\left[2-\tfrac{1}{n}-\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\right] + 1\times\left[2+\tfrac{1}{n}-\left(2-\tfrac{1}{n}\right)\right]$$
$$+\ 2\left[3-1/n-\left(2+\tfrac{1}{n}\right)\right] + 2\left[3-\left(3-1/n\right)\right] =$$
$$= 1 - \cancel{\tfrac{2}{n}} + \cancel{\tfrac{2}{n}} + 2 - 2\,\tfrac{2}{n} + \tfrac{2}{n} = 1+2-\tfrac{2}{n}.$$

ASÍ
$$S([x],P_n) - I([x],P_n) = \frac{4}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

LUEGO POR EL CRITERIO DE INTEGRABILIDAD DE RIEMANN EXISTE LA INTEGRAL DE $[x]$ EN $[0,3]$

ADEMÁS

$$I([x],P_n) = 3-\frac{2}{n} \le \int_0^3 [x]\,dx \le 3+\frac{2}{n} = S([x],P_n)$$
$$\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \qquad\qquad \downarrow{\scriptstyle n\to\infty}$$
$$3 \qquad\qquad\qquad 3$$

LUEGO $\int_0^3 [x]\,dx = 3.$

PROBLEMA 4º

$$\int \operatorname{arc\,sh} x\,dx \underset{\text{PARTES}}{=} x \operatorname{arc\,sh} x - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$\operatorname{arc\,sh} x$ INVERSA DE $\operatorname{sh} x$

LUEGO $\operatorname{Arcsh}' x = \dfrac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{Arcsh} x)} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Arcsh} x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{Arcsh} x)}}$

$\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$

$$= x \operatorname{arc\,sh} x - \sqrt{1+x^2}.$$

PROBLEMA 5º

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx$ = INTEGRAL IMPROPIA CON "PROBLEMAS" EN $x=0$ Y $x=\infty$.

$$= \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx$$

$\left|\dfrac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right| \underset{x\in(0,1)}{\le} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ Y $\displaystyle\int_0^1 x^{-2/3}dx = 3x^{1/3}\Big|_0^1 = 3$

$\dfrac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ ESTA MAYORADA POR UNA FUNCIÓN INTEGRABLE, SE TIENE QUE LA INTEGRAL ES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE Y POR TANTO EXISTE $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx$

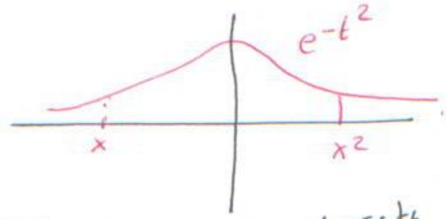
$\left|\dfrac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right| \underset{x\ge 1}{\le} e^{-x}$ Y $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_1^\infty = \frac{1}{e}$

LA FUNCIÓN PARA $x\ge 1$, ESTA MAYORADA POR LA FUNCIÓN e^{-x} QUE ES INTEGRABLE EN $[1,\infty)$ LUEGO LA INTEGRAL $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx$ ES ABSOLUTAMENTE INTEGRABLE Y POR TANTO INTEGRABLE.

COMO EXISTEN AMBAS INTEGRALES TAMBIÉN EXISTE $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx$.

PROBLEMA 6:

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt.$$



OBSERVACIÓN $\quad e^{-t^2} < e^{-|t|}$ SI $t > 1$, COMO EXISTE $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}dx$

EXISTE $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt.$

$\mathrm{Dom}\ F = \mathbb{R}$

COMO $e^{-t^2} > 0$, ENTONCES SI $x < 0 \Rightarrow F(x) > 0$

SI $x \in (0,1)$, $x^2 < x$ Y ASÍ

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt = -\int_{x^2}^{x} e^{-t^2}\,dt < 0$$

SI $x > 1 \Rightarrow F(x) > 0.$

$F(0) = F(1) = 0.$

LÍMITES $\quad$ SI $x \to -\infty$, $x^2 \to \infty$ LUEGO

$$\int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt \xrightarrow[x\to-\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = A > 0$$

SI $x \to \infty$, $x^2 \to \infty$ Y POR EL CRITERIO DE INTEGRABILIDAD DE CAUCHY $\int_x^{x^2} e^{-t^2}dt \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

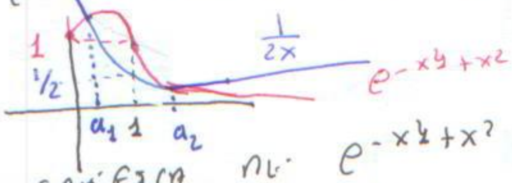
DERIVADA $\quad F(x) = \int_x^0 e^{-t^2}\,dt + \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt =$

$= -\int_0^x e^{-t^2}\,dt + \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt \quad$ USANDO EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

$$F'(x) = -e^{-x^2} + 2x e^{-x^4} = e^{-x^2}\left[-1 + 2x e^{-x^4+x^2}\right]$$

$F'(x) = 0 \iff 2x e^{-x^4+x^2} - 1 = 0 \iff \underbrace{e^{-x^4+x^2}}_{>0} = \dfrac{1}{2x}$

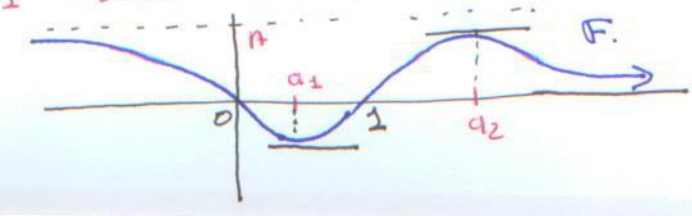
PARA $x > 0$



$\lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2x}}{e^{-x^4+x^2}} = \infty$

SEGÚN LA GRÁFICA DE $e^{-x^4+x^2}$ Y $\frac{1}{2x}$ $\ x > 0$, EXISTEN $a_1 \in (0,1)$ Y $a_2 > 1$ CON $F'(a_1) = F'(a_2) = 0$

LUEGO



PROBLEMA 7:

$\sum_{n=2}^{\infty} n x^{n-1}$. Serie de potencias. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|x|^n}{n|x|^{n-1}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}|x| = |x|$. Si $|x|<1$ la serie es convergente. Si $x\in[-r,r]$ con $r<1$, la serie converge uniformemente.

La integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ es impropia ya que $f(1)=\infty$,

Así si existe $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{r\to 1}\int_0^r f(x)\,dx =$

$= \lim_{r\to 1}\int_0^r \sum_{n=2}^{\infty} n x^{n-1}\,dx = \lim_{r\to 1}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^r n x^{n-1}\,dx\right) =$

Convergencia uniforme en $[0,r]$

$= \lim_{r\to 1}\left(\sum_{n=2}^{\infty} x^n\Big|_0^r\right) = \lim_{r\to 1}\left(\sum_{n=2}^{\infty} r^n\right) =$

$0\le r<1$ serie geométrica

$\lim_{r\to 1}\frac{r^2}{1-r} = \infty$. La integral diverge.

PROBLEMA 8:

Fijado $x\in[0,1]$, $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0 : n,m\geq n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f_m(x)|\le\varepsilon$ es de Cauchy y

luego la sucesión numérica $(f_n(x))_n$

por tanto existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ($f(x)$ notación)

Hemos visto que existe el límite puntual de la sucesión al cual llamamos f.

Ahora como $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0$ tal que si $m,n\geq n_0$ se tiene que

$$|f_m(x)-f_n(x)|\le\varepsilon \qquad \forall x\in[0,1]$$

$$\Big\downarrow m\to\infty$$

$$|f(x)-f_n(x)|\le\varepsilon \qquad \forall x\in[0,1].$$

Luego $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en $[0,1]$