EXAMEN EXTRAORDINARIO (1er cuatrimestre)

Apellidos: ....

Nombre: ....

Ejercicio 1. (1 punto). La propiedad de los intervalos encajados establece que si $(I_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de intervalos cerrados, acotados y encajados de $\mathbb{R}$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Se pide dar 3 ejemplos de intervalos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para los que falle el teorema y que satisfagan las siguientes propiedades:

(a). $(I_n)_{n\geq 1}$ son cerrados y acotados, pero no encajados.

(b). $(I_n)_{n\geq 1}$ son cerrados y encajados, pero no acotados.

(c). $(I_n)_{n\geq 1}$ son acotados y encajados, pero no cerrados.

Ejercicio 2. (1 punto). Considere la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ dada por la fórmula de recursión $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$. Es decir,

$$a_n := \sqrt{2+\sqrt{2+ \overset{n \text{ veces}}{\cdots} + \sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

con $n \geq 1$ raíces cuadradas anidadas. Demuestre mediante <u>inducción</u> las siguientes propiedades:

(a). $a_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ para todo $n \geq 1$ (para aplicar el razonamiento inductivo, puede ser de utilidad la fórmula del coseno del ángulo doble $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$).

(b). a_n es irracional para todo $n \geq 1$.

Ejercicio 3. (1 punto). En el ejercicio anterior, hemos determinado que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ dada por

$$a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+ \overset{n \text{ veces}}{\cdots} + \sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

con $n \geq 1$ raíces cuadradas anidadas, es igual a $a_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ para todo $n \geq 1$.

(a). (0.5 ptos.) Determine, en caso de que exista, el siguiente límite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2-a_n}{\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2}.$$

(b). (0.5 ptos.) Mediante el criterio de comparación por cociente, determine la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2-a_n).$$

Ejercicio 4. (1 punto). Demuestra razonadamente la convergencia o divergencia de los siguientes límite. En caso de que convergan determinar el límite.

(a). $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(b). $\lim\limits_{x\to 0} e^{1/x}$.

(c). $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\operatorname{sen}(x)$.

EXAMEN EXTRAORDINARIO. ANÁLISIS DE VARIABLE REAL (m5).

30 de Junio de 2023.

5.- (1 punto). Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ \frac{1}{x-3} & \text{si} \quad x \in (1,2] \end{cases}$. ¿Es la función f uniformemente continua en $[0,2]$? Justifica tu respuesta.

6.- (1 punto). Sea $f[a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f'(x) < 0$ en todo $x \in (a,b)$, prueba que f es decreciente en $[a,b]$.

7.- (1 punto). Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $(P_n)_n$ una sucesión de particiones del intervalo $[a,b]$ de modo que existen y son iguales los límites $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n)$. Prueba que la función f es integrable en el intervalo $[a,b]$.

8.- (1 punto). Calcula $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{3x} - 2e^{2x} + e^{x}}$.

9.- (1 punto). Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \in [0,1) \\ \frac{1}{x^2+1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$. ¿ Existe $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$?

10.- (1 punto). Representa la gráfica de la función $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3n(x-1)^{2n}$.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

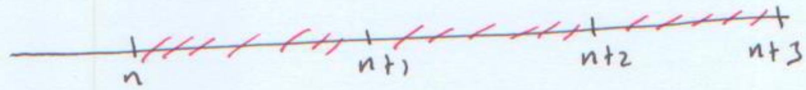
Revisión del examen: . **No** es obligatorio acudir a la revisión.

EXAMEN EXTRA - 2023

PROBLEMA 1:

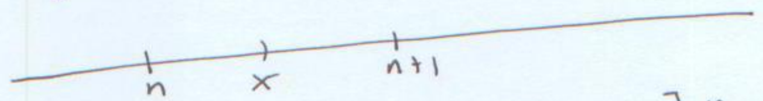
a) Sea $I_n = [n, n+1]$

$$[n, n+1] \cap [n+1, n+2] \cap [n+2, n+3] = \emptyset$$



Luego $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$ y cada I_n es un cerrado y acotado

b) $I_n = [n, \infty)$ $n \geq 1$



$I_1 = [1, \infty)$ Sea $x \geq 1$ $\exists n$ natural

con $n \leq x < n+1$ (n parte entera de x)

Así $x \in [n, \infty)$, pero $x \notin [n+1, \infty)$.

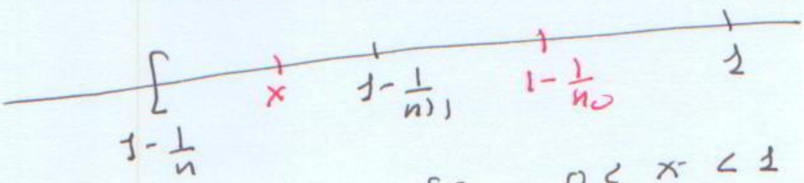
Luego $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$, cada I_n es cerrado

y $I_{n+1} \subsetneq I_n$ $\forall n \geq 1$.

c) $I_n = \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right)$ $n \geq 1$ I_n es acotado

y además $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} < 1$, luego

$$I_{n+1} \subseteq I_n$$



$1 \notin I_n$ $\forall n \geq 1$; si $0 < x < 1$ como $\lim_{n \to \infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$, existe n_0 tal que si $n \geq n_0$

$\Rightarrow x < 1 - \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow x \in I_n = [1 - \frac{1}{n}, 1)$.

Luego $\bigcap_{n \geq 1} I_n = \emptyset$

EXAMEN EXTRA - 2023

PROBLEMA 2)

a) $a_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$ LA SEGUNDA IGUALDAD ES CIERTA YA QUE $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

LUEGO $2\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

SI SUPONEMOS QUE $a_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$, entonces

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \sqrt{2 + 2\cos 2\frac{\pi}{2^{n+2}}} =$$

USANDO $\cos 2\theta =$
$= 2\cos^2\theta - 1$

$$= \sqrt{2 + 2\left(2\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}} - 1\right)} =$$

$$= \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$$ LO QUE

PRUEBA EL RESULTADO PARA TODO n.

b) $a_1 = \sqrt{2}$ CLARAMENTE ES IRRACIONAL

SUPONGAMOS QUE a_n ES IRRACIONAL

SI $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ ES RACIONAL $\Rightarrow$

$a_{n+1} = \frac{p}{q} = \sqrt{2+a_n} \Rightarrow a_n = \frac{p^2}{q^2} - 2 \in \mathbb{Q}$.

LLEGAMOS A CONTRADICCIÓN. LUEGO NECESARIAMENTE a_{n+1} ES IRRACIONAL.

EXAMEN EXTRA - 2023

EJERCICIO 3

a) $a_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$, YA QUE

$\cos 0 = 1$

$2 - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ LUEGO $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2-a_n}{\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2}$,

y $\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

PRESENTA UNA INDETERMINACIÓN.

AHORA $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-a_n}{\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2}$

OBSERVEMOS QUE $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ ES EL ARGUMENTO DEL COSENO Y APARECE EN EL DENOMINADOR.

POR OTRO LADO $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \underset{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2}.$

LUEGO $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\left(1-\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2} = 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-a_n}{\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2} = 1$; ADEMÁS $2-a_n > 0$

YA QUE $0 \le |\cos x| \le 1$.

LUEGO POR EL CRITERIO DE COMPARACIÓN POR COCIENTE LA SERIE $\sum 2-a_n$ ES CONVERGENTE SI Y SÓLO SI LA SERIE $\sum\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2$ ES CONVERGENTE

$$\sum_{n\ge 1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 = \pi^2 \sum_{n\ge 1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\,2^n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n \underset{\text{SERIE GEOMÉTRICA}}{=}$$

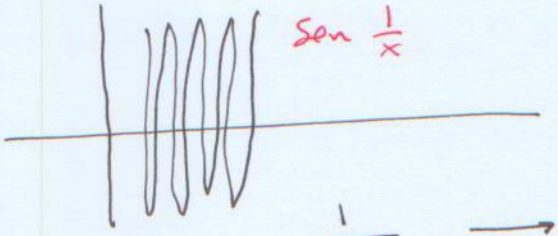
$$= \frac{\pi^2}{4}\,\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi^2}{12}$$

LA SERIE $\sum 2-a_n$ ES CONVERGENTE.

EXAMEN EXTRA - 2023

PROBLEMA 4: a) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

LA FUNCIÓN $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ OSCILA AL ACERCARSE A CERO



ASÍ SI TOMAMOS $\frac{1}{2k\pi} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ Y

$$\operatorname{sen}\frac{1}{\frac{1}{2k\pi}} = \operatorname{sen} 2k\pi = 0 \quad \forall k$$

POR OTRO LADO SI TOMAMOS $\frac{1}{\pi/2 + 2k\pi} \to 0$ Y

$$\operatorname{sen}\frac{1}{\frac{1}{\pi/2+2k\pi}} = \operatorname{sen}(\pi/2+2k\pi) = 1 \quad \forall k$$

LUEGO EL LÍMITE NO EXISTE.

b) $\lim\limits_{x\to 0} e^{1/x}$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \infty \qquad \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \qquad \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$$

NO EXISTE EL LÍMITE YA QUE LOS LÍMITES LATERALES SON DISTINTOS.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2-1}) \operatorname{sen} x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}} \operatorname{sen} x$

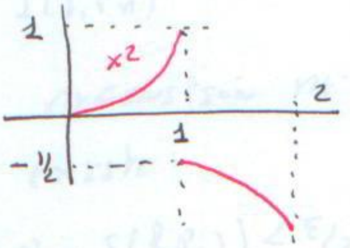
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2}+1}{x+\sqrt{x^2-1}} \operatorname{sen} x = 0$$

$x+\sqrt{x^2-1} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ Y

$$\left| \frac{\operatorname{sen} x}{x+\sqrt{x^2-1}} \right| \le \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

PROBLEMA 5º

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$$



f no es continua en $x=1$

ya que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} x^2 = 1$

y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} \dfrac{1}{x-3} = -\dfrac{1}{2}$

Como la continuidad uniforme implica la continuidad
f NO puede ser uniformemente continua.

PROBLEMA 6:

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b)

Sean $x, y \in [a,b]$ con $x < y$, entonces

$f: [x,y] \to \mathbb{R}$ es continua y derivable en (x,y)

se puede aplicar el teorema del valor $c \in (x,y)$ con medio y así existe

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) < 0$$

ya que $y-x>0$
y $f'(c) < 0$ hipótesis

Luego $f(y) < f(x)$ $\forall x, y \in [a,b]$ con $x<y$.

Así f es estrictamente decreciente.

PROBLEMA 7:

SEA $\alpha = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n)$

PARA TODO $\varepsilon > 0$ (USANDO LA DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA SUCESIÓN), EXISTE

n_1 TAL QUE SI $n \geq n_1 \Rightarrow |\alpha - S(f,P_n)| < \varepsilon/2$

y n_2 TAL QUE SI $n \geq n_2 \Rightarrow |\alpha - I(f,P_n)| < \varepsilon/2$

LUEGO PARA $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ SI $n > n_0$

$$|S(f,P_n) - I(f,P_n)| = |S(f,P_n) - \alpha + \alpha - S(f,P_n)| \leq$$

$$\leq |S(f,P_n) - \alpha| + |\alpha - I(f,P_n)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

LUEGO POR EL CRITERIO DE INTEGRABILIDAD DE RIEMANN f ES INTEGRABLE.

ADEMÁS, COMO

$$\underset{\substack{\downarrow n\to\infty \\ \alpha}}{S(f,P_n)} \geq \int_a^b f \geq \underset{\substack{\downarrow n\to\infty \\ \alpha}}{I(f,P_n)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n).$$

PROBLEMA 8:

$$\int \frac{dx}{e^{3x} - 2e^{2x} + e^x} \underset{\substack{u = e^x \\ du = e^x dx \\ \Rightarrow \frac{du}{u} = dx}}{=} \int \frac{du}{u(u^3 - 2u^2 + u)} =$$

$$= \int \frac{du}{u^2(u-1)^2} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{FRACCIONES} \\ \text{SIMPLES}}}{=} \int \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u-1} + \frac{D}{(u-1)^2}\, du.$$

$$Au(u-1)^2 + B(u-1)^2 + Cu^2(u-1) + Du^2 = A(u^3 - 2u^2 + u) + B(u^2 - 2u + 1) + C(u^3 - u^2) + Du^2$$

$$= u^3(A + C) + u^2(-2A + B - C + D) + u(A - 2B) + B$$

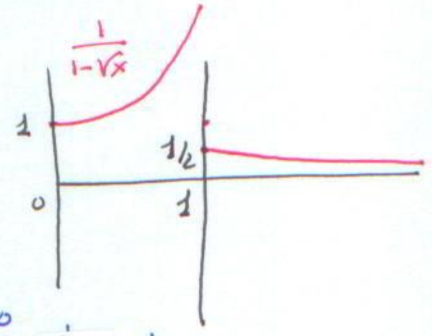
ASÍ $B = 1$, $A = 2$ $C = -2$ y $D = -1$

$$= 2\ln u - \frac{1}{u} - 2\ln(u-1) - \frac{1}{u-1} \underset{u = e^x}{=}$$

$$\boxed{2x - \frac{1}{e^x} - 2\ln(e^x - 1) - \frac{1}{e^x - 1}}$$

PROBLEMA 9:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\sqrt{x}} & \text{si } x \in [0,1) \\[2mm] \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx \underset{\text{si existe}}{=} \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

Ahora $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{x}}\,dx =$

$u = \sqrt{x}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$\Leftrightarrow \; 2u\,du = dx$

$$= \int_0^1 \frac{2u}{1-u}\,du = \int_0^1 \frac{2u-2+2}{1-u}\,du =$$

$$= \int_0^1 -2 + \frac{2}{1-u}\,du = -2u - 2\ln(1-u)\Big|_0^1 =$$

$$= \infty.$$

Por otro lado

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Arctan} x\Big|_1^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Como la primera integral no converge la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ no existe.

PROBLEMA 10:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3n\,(x-1)^{2n}.$$

SERIE DE POTENCIAS CENTRADA EN $a=1$.

Dom f BUSCAMOS EL RADIO DE CONVERGENCIA DE LA SERIE DE POTENCIAS.

USANDO EL CRITERIO DEL COCIENTE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)\,|x-1|^{2n+2}}{3n\,|x-1|^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}|x-1|^2 = |x-1|^2 < 1$$

$\iff x \in (0,2)$.

PARA $x=0$ $\quad \sum 3n\,(-1)^{2n} = \infty$ DIVERGE $\quad \left(3n(-1)^{2n} \not\to_{n\to\infty} 0\right)$

PARA $x=2$ $\quad \sum 3n = \infty.$

LUEGO Dom $f = (0,2)$.

ADEMÁS $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$

- OBSERVEMOS QUE SI $r \in (0,1)$ $\quad f(1-r) = f(1+r)$

LUEGO f ES SIMÉTRICA RESPECTO DE LA RECTA $x=1$

- $f(x) \geq 0$
- DERIVADA

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3n\,(2n)\,(x-1)^{2n-1} \begin{cases} <0 & \text{SI } x \in (0,1) \\ =0 & \text{SI } x=0 \\ >0 & \text{SI } x \in (1,2) \end{cases}$$

SERIE DE POTENCIAS

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3n\,2n\,(2n-1)\,(x-1)^{2n-2} > 0$$

LUEGO