# EXAMEN FINAL. ANÁLISIS DE VARIABLE REAL (m5).

**Primer PARCIAL.** **2 de Junio de 2023.**

**1.-** (1 punto). Determine el supremo y el ínfimo del siguiente conjunto:

$$B := \left\{ x \in \mathbb{Q} : \left| \frac{2x}{x-1} - \sqrt{8} \right| \geq \sqrt{2} \right\}.$$

¿Existe el máximo y el mínimo del conjunto $B$? Asimismo, deduzca razonamente cuál es su clausura $\overline{B}$, su interior $\mathring{B}$ y su frontera $\partial B$.

**2.-** (1 punto). Calcule razonadamente el $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ donde

$$x_n = \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_{n+1} = \sqrt{3x_n}, & \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**3.-** (1 punto). Considérese la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dada por:

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \dots,$$

es decir, cuyos términos $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vienen dados por la fórmula

$$a_n := \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}, & \text{si } n \text{ impar}, \\ \dfrac{1}{2^{n-2}}, & \text{si } n \text{ par}, \end{cases} \qquad n \geq 1.$$

Demuestre, utilizando el criterio de la raíz, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y determine razonadamente el valor de dicha serie. ¿Es posible deducir la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mediante el criterio del cociente? Razone su respuesta.

**4.-** (1 punto). Calcule por la definición el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3 - x^2}}.$$

**Observaciones:** Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.

El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

**Revisión del examen:** El próximo dia 7 de Junio. **No** es obligatorio acudir a la revisión.

# EXAMEN FINAL. ANÁLISIS DE VARIABLE REAL (m5).

**Segundo PARCIAL. 2 de Junio de 2023.**

**5.-** (1 punto). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Prueba que $f$ alcanza un punto de mínimo en $[a, b]$.

**6.-** (1 punto). Representa la gráfica de $f(x) = \operatorname{arcsh} x$.

**7.-** (1 punto). Encuentra un ejemplo de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y de una sucesión $(P_n)_n$ de particiones del intervalo $[a, b]$ de modo que existen y son distintos $\lim_{n\to\infty} S(f, P_n) > \lim_{n\to\infty} I(f, P_n)$, pero que sin embargo la función es integrable en el intervalo $[a, b]$.

**8.-** (1 punto). Calcula $\displaystyle\int \frac{x^4 + x^3 - 1}{x^3 - 2x^2 + x}\,dx$.

**9.-** (1 punto). Calcula el área de la región del plano

$$A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in (0, 1] \ \text{ y } \ \ln x \le y \le 0 \,\}.$$

**10.-** (1 punto). Sea la sucesión de funciones $f_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{nx^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$, donde $x \in \mathbb{R}$. Determina la convergencia puntual y uniforme de la sucesión.

**Observaciones:** Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

**Revisión del examen:** El próximo 7 de Junio. **No** es obligatorio acudir a la revisión.

## PROBLEMA 1:

$$B = \left\{ x \in \mathbb{Q} : \left| \frac{2x}{x-1} - \sqrt{8} \right| \geq \sqrt{2} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{Q} : \frac{2x}{x-1} - \sqrt{8} \leq -\sqrt{2} \ \text{ó}\ \frac{2x}{x-1} - \sqrt{8} \geq \sqrt{2} \right\}$$

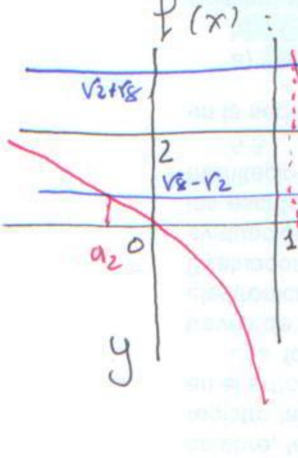
$$= \left\{ x \in \mathbb{Q} : \frac{2x}{x-1} \leq \sqrt{8} - \sqrt{2} \ \text{ó}\ \frac{2x}{x-1} \geq \sqrt{2} + \sqrt{8} \right\}$$

Tomemos la función $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ cuya gráfica es:

Además,

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$, $f$ es decreciente.




$\boxed{a_1}$: $\frac{2x}{x-1} = \sqrt2 + \sqrt8 \iff 2x = x(\sqrt2+\sqrt8) - \sqrt2 - \sqrt8$

Así $a_1 = \frac{\sqrt2+\sqrt8}{\sqrt2+\sqrt8-2} = \frac{2+2\sqrt2}{2+2\sqrt2-\sqrt2\sqrt2} = \boxed{\frac{3}{3-\sqrt2}}$

$\boxed{a_2}$: $\frac{2x}{x-1} = \sqrt8 - \sqrt2 = 2\sqrt2 - \sqrt2 = \sqrt2$

Así $2x = \sqrt2 x - \sqrt2$ luego $x = \frac{-\sqrt2}{2-\sqrt2} = \frac{-1}{\sqrt2-1}$

$= \boxed{\frac{1}{1-\sqrt2}}$

Dado que $f$ es decreciente y que $1 \notin \text{Dom} f$.

$$B = \mathbb{Q} \cap \left( \left[-\frac{1}{\sqrt2-1}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3}{3-\sqrt2}\right] \right)$$

Ahora, como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$

$\bar{B} = \left[-\frac{1}{\sqrt2-1}, \frac{3}{3-\sqrt2}\right]$ y $\partial B = \bar{B} - \emptyset = \bar{B}$

$\mathring{B} = \emptyset$

Es $\sup B = \frac{3}{3-\sqrt2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (si $\frac{3}{3-\sqrt2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt2 \in \mathbb{Q}$ lo cual no es posible)

luego no existe $\max B$

Es $\inf = \frac{-1}{\sqrt2-1} = \frac{1}{1-\sqrt2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (si $\frac{1}{1-\sqrt2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt2 \in \mathbb{Q}$ lo cual no es posible)

luego no existe $\min B$.

PROBLEMA 2:

$$x_n : \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_{n+1} = \sqrt{3x_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$x_1 = 4 > x_2 = \sqrt{3 \cdot 4} > \sqrt{3\sqrt{3\cdot 4}} = x_3$$

$x_n$ ES DECRECIENTE Y ACOTADA INFERIORMENTE

ACOTADA $x_n \geq 1$ $\quad x_1 = 4 \geq 1$ $\quad$ SI $x_n \geq 1$

$$\Rightarrow 3x_n \geq 1 \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{3x_n} \geq 1.$$

DECRECIENTE: SI $x_{n-1} \geq x_n \geq 1 \Rightarrow$

$$3x_{n-1} \geq 3x_n \geq 1 > 0 \quad \text{LUEGO}$$

$$\left[\, x_n = \sqrt{3x_{n-1}} \geq \sqrt{3x_n} = x_{n+1} \right]$$

POR SER DECRECIENTE Y ACOTADA EXISTE

$$\ell = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

ADEMÁS

$$x_{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \ell \qquad \sqrt{3x_n} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{3\ell}.$$

SE SIGUE QUE $\quad \ell^2 = 3\ell \Rightarrow \ell = 3$ $\quad (\ell \geq 1.)$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 3}$$

PROBLEMA 3:

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\cdots=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+$$

$$\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}+\cdots=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

Como $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$ (SERIE GEOMÉTRICA) convergente, como esta serie es absolutamente convergente cualquier reordenación suya (por ejemplo $\sum a_n$) es convergente y converge a la misma.

Si $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ es impar}\\[2mm] \dfrac{1}{2^{n-2}} & \text{si } n \text{ es par}\end{cases}$ $\qquad \sqrt[n]{a_n}=\begin{cases}\dfrac{1}{2} \longrightarrow 1/2<1\\ \text{ó}\\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{n}} \longrightarrow 1/2<1\end{cases}$

En cualquier caso $\sqrt[n]{a_n}\longrightarrow 1/2<1$ y el criterio de la raíz nos dice que $\sum a_n$ es convergente.

Por otro lado
$$\begin{cases}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n-3}}}=\dfrac{2^{n-3}}{2^n}=\dfrac{1}{8} & n \text{ impar}\\[4mm] \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=\dfrac{2^{n-1}}{2^{n-2}}=2 & n \text{ par}\end{cases}$$

$\underline{\ell}\ a_n<1$ y

el criterio del cociente no se puede aplicar.

$\underline{\ell}\ a_n>1$

PROBLEMA 4:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3-x^2}} = 0 \quad \left( x^{3/2} > x \quad \text{para } x \to \infty \right)$$

Tenemos que ver que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M > 0$ tal que si $x \geq M \Rightarrow \left| \frac{x}{\sqrt{x^3-x^2}} \right| = \frac{x}{\sqrt{x^3-x^2}} \leq \varepsilon$

Además $\frac{x}{\sqrt{x^3-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^3-x^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \leq$ $\quad x > 2$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{x-\frac{x}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \leq \varepsilon$$

$\boxed{\text{Sea } M \geq \max\left\{\frac{2}{\varepsilon^2}, 2\right\}.}$

Si $x > M = \frac{2}{\varepsilon^2} \Rightarrow \sqrt{x} \geq \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \Rightarrow$

$x > 2$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \leq \varepsilon$..

# PROBLEMA 5°

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.

Por ser continua en un intervalo cerrado está acotada.

Claro, si no, existiría $(x_n) \in [a,b]$ con $f(x_n) \downarrow -\infty$. Por el teorema de Bolzano Weierstrass existe $x \in [a,b]$ y una subsucesión con $x_{n_k} \to x$. De la continuidad $f(x_{n_k}) \to f(x)$ y así $f(x) = -\infty$ ya que $f(x_{n_k}) \downarrow -\infty$. Lo que nos lleva a contradicción.

Sea $M$ cota inferior de $\{f(t) : t \in [a,b]\}$.

Existe $\beta = \inf\{f(t) : t \in [a,b]\}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $\beta + \frac{1}{n}$ no es ínfimo del conjunto, debe existir $x_n \in [a,b]$ con

$$\beta \le f(x_n) \le \beta + \frac{1}{n}.$$

Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe $x_0 \in [a,b]$ y una subsucesión $x_{n_k} \to x_0$; de la continuidad $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$

Por otro lado

$$\begin{array}{ccccc} \beta & \le & f(x_{n_k}) & \le & \beta + \frac{1}{n_k} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle k \to \infty} \\ \beta & & \beta & & \beta \end{array}$$

Luego $f(x_{n_k}) \to \beta$. Así por la unicidad del límite $f(x_0) = \beta$. Luego $\forall x \in [a,b]$

$$f(x_0) \le f(x)$$

$x_0$ es un mínimo

PROBLEMA 6:

$f(x) = \text{Arc sh}\, x$ EL $\text{Arc sh}\, x$ ES LA FUNCIÓN INVERSA DEL $\text{sh}\, x$. ESTA CIACUMTADA ES LA MISMA GRÁFICA QUE LA DEL

$$\text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$\text{Dom sh} = \mathbb{R}$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (1)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \infty \quad (2)$$

y $\text{sh}' x = \text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ LUEGO sh ES SIEMPRE CRECIENTE

COMO $\text{Im sh} = \mathbb{R} \Rightarrow \text{Dom Arc sh} = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{\text{ch}(\text{Arc sh}\, x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

$\text{ch}\, x = \sqrt{1 + \text{sh}^2 x}$

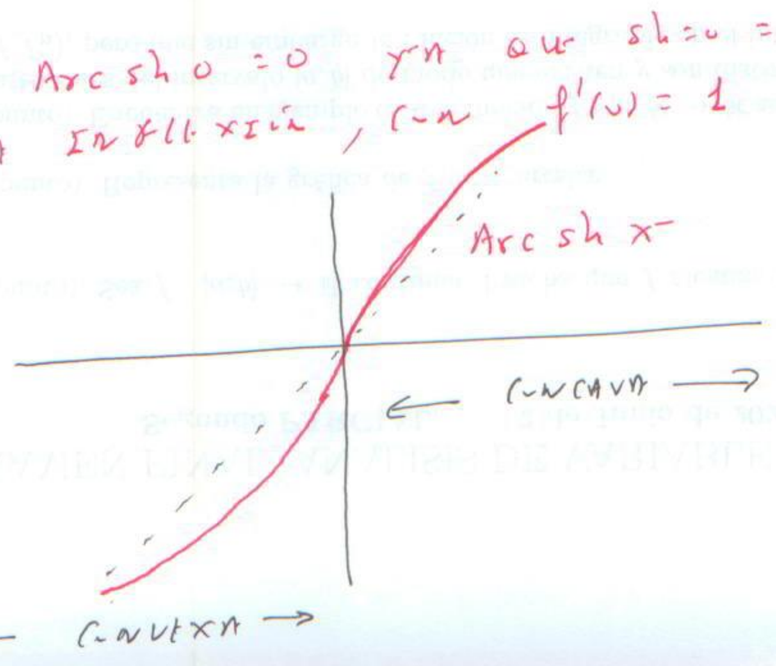
ES UNA INVERSA ESTRICTAMENTE CRECIENTE

LUEGO EL $\text{Arc sh}\, x$ ES CRECIENTE y DE (2) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

DE (1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

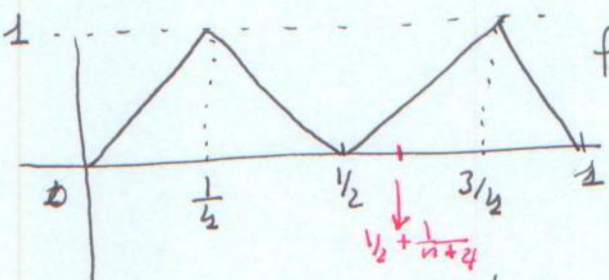
ADEMÁS $$f''(x) = \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2} = -\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} \begin{cases} <0 & \text{SI } x>0 \\ =0 & \text{SI } x=0 \\ >0 & \text{SI } x<0 \end{cases}$$

$\text{Arc sh}\, 0 = 0$ YA QUE $\text{sh}\, 0 = 0$, ES UN PUNTO DE INFLEXIÓN, CON $f'(0) = 1$



## PROBLEMA 7:

SEA $f$ LA FUNCIÓN DADA POR LA GRÁFICA




SEA $P_n = \{0, \frac{1}{2} + \frac{1}{4+n}, 1\}$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4+n} < \frac{3}{4} \quad \forall n \geq 1$$

AHORA $S(f,P_n) = 1 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+4}\right) + 1 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+4}\right)\right) = 1$

ASÍ $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = 1$

$I(f,P_n) = 0 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+4}\right) + 0 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+4}\right)\right) = 0$

ASÍ $\lim_{n\to\infty} I(f,P_n) = 0$

COMO $f$ ES CONTINUA, $f$ ES INTEGRABLE EN $[0,1]$.

## PROBLEMA 8:

$$\int \frac{x^4+x^3-1}{x^3-2x^2+x}\,dx = \int (x+3) + \frac{5x^2-3x-1}{x^3-2x^2+x}\,dx$$

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3-1 & x^3-2x^2+x \\ -x^4+2x^3-x^2 & x+3 \\ \hline 3x^3-x^2-1 & \\ -3x^3+6x^2-3x & \\ \hline 5x^2-3x-1 & \end{array}$$

$$= \int x+3 - \frac{1}{x} + \frac{6}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

DESCOMPOSICIÓN FRACCIONES SIMPLES

$$\frac{5x^2-3x-1}{x^3-2x^2+x} = \frac{5x^2-3x-1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx = 5x^2-3x-1$$

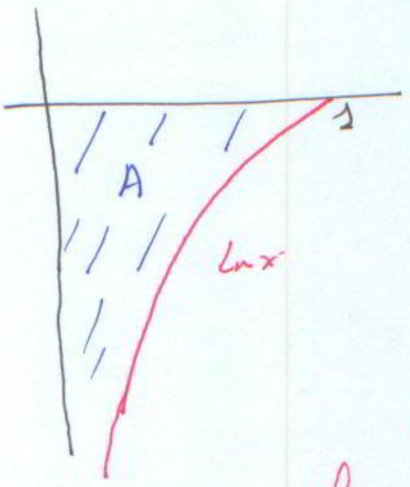
$$\Leftrightarrow (A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A = 5x^2 - 3x - 1$$

ASÍ $A = -1$, $B = 6$ y $C = 1$

$$= \int x+3\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{6}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$\boxed{= \frac{x^2}{2} + 3x - \ln x + 6\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + K}$$

## PROBLEMA 9:




$$\text{Área } A = -\int_0^1 \ln x \, dx \underset{\text{partes}}{\overset{\text{integral impropia}}{=}}$$

$$= -\left[ x \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x}\, dx \right] =$$

$$= 0 + \int_0^1 dx = 1$$

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0.$$

## PROBLEMA 10:

$$f_n(x) : \begin{cases} e^{-\frac{1}{nx^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

( $\lim_{x\to 0} f_n(x) = 0$. $f_n$ es continua en todo $\mathbb{R}$ !)

Límite puntual.

Fijamos $x \neq 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{nx^2}} = 1$

$x = 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$

Convergencia uniforme:

El límite puntual $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ no es continua en 0, como $f_n$ es continua en todo $\mathbb{R}$, $\forall n$, se sigue que $(f_n)$ NO converge uniformemente a $f$ en $\mathbb{R}$ o en ningún $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ con $0 \in [a,b]$.

Sea $M > 0$ y sea $|x| \geq \sqrt{M}$, luego $x^2 \geq M$.

Así $n x^2 \geq nM \Rightarrow \frac{1}{nM} \geq \frac{1}{nx^2} \Rightarrow -\frac{1}{nx^2} \geq -\frac{1}{nM}$

$$\begin{array}{ccccc} y \quad 1 & \geq & e^{-\frac{1}{nx^2}} & \geq & e^{-\frac{1}{nM}} \\ \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle n\to\infty} & & \downarrow {\scriptstyle n\to\infty} \\ 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

Luego $f_n \to 1$ uniformemente en $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$ para todo $a > 0$.