EXAMEN FINAL. AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

14 de Junio de 2023.

1.- Dada la serie de funciones $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{x^4+1}\right)^k$, encuentra la función a la que converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$. Justifica tu respuesta.

2.- Calcula la serie de Fourier de $f(t) = |\operatorname{sen}(t)|$, $t \in [-\pi, \pi]$.
Indicación: Recuerda que $\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$.

3.- Unos científicos quieren modelizar un proceso. Hacen un experimento y su solución es $x_1(t) = 3e^{2t}\cos(3t) + e^{-t}$. Hacen otro, con distintos parámetros de entrada, y la solución es $x_2(t) = 2e^{2t}\operatorname{sen}(3t) + e^{-t}$. Si el proceso lo modelizan a través de una E.D.O. lineal de segundo orden y coeficientes constantes, ¿cuál es la ecuación que encuentran? Si repiten el experimento con datos iniciales $x(0) = 13$ y $x'(0) = 72$ ¿que solución deberían encontrar?

4.- Queremos encontrar todas las soluciones x de $x^2 \equiv 1 \mod 12$ estudiando primero $x^2 \equiv 1 \mod 3$ y $x^2 \equiv 1 \mod 4$.

4.1) Encuentrar todos los pares $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ **distintos** de modo que $a_1^2 \equiv 1 \mod 3$ y $a_2^2 \equiv 1 \mod 4$.

4.2) Para cada par (a_1, a_2) diferente, resuelve el sistema $\begin{cases} x \equiv a_1 \mod 3 \\ x \equiv a_2 \mod 4 \end{cases}$ por el Teorema Chino de los Restos.

4.3) ¿Las soluciones x anteriores son las soluciones de $x^2 \equiv 1 \mod 12$? ¿Por qué?

5.- Consideramos el anillo de polinomios $\mathbb{Z}_5[x]$:

1. Descompón el polinomio $p(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 + 4x$ en factores irreducibles.
2. Estudia si el polinomio $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 2$ tiene raíces múltiples en $\mathbb{Z}_5$.

6.- Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5[x]/(x^n + x + c)$:

1. Determina los valores de n y c para que $\mathbb{K}$ sea un cuerpo de 25 elementos, sabiendo que n y c son distintos.
2. Con los valores obtenidos en el apartado anterior, calcula el inverso de $[x^2 + 2]$ en $\mathbb{K}$.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.
Revisión del examen:
.- **Presencial .**
.- Las soluciones del examen se podrán consultar en: http://blogs.mat.ucm.es/cruizb/inicio/docencia-curso-22-23/ampliacion-de-matematicas/examenes-de-am/
La revisión del examen se efectuará el día .... de Junio a las .... h. No es obligatorio solicitar la revisión.

PROBLEMA 1:] $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{x^4+1}\right)^k$.

$0 \le \frac{x^2}{x^4+1} < 1$, SERIE GEOMÉTRICA

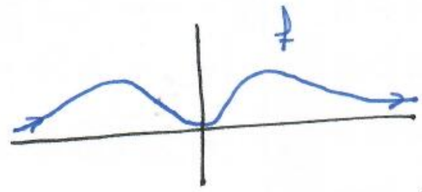
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{x^4+1}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{x^4+1}} = \frac{x^4+1}{x^4-x^2+1} \quad \text{SI } x$$

OBSERVAMOS QUE SI $x = 0$, LA SERIE SE REDUCE A

$$\underset{k=0.}{\overset{\shortparallel}{1}} + 0 + 0 + \dots$$

SEA $f(x) = \frac{x^2}{x^4+1} \in [0, 1)$, $f(0) = 0$ y $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^4+1} = 0$

ASÍ



$$f'(x) = \frac{2x(x^4+1) - x^2(4x^3)}{(x^4+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^5 + 2x - 4x^5}{(x^4+1)^2} =$$

$$= \frac{2x(1 - x^4)}{(x^4+1)^2} \begin{cases} = 0 & \text{SI } x = \pm 1 \\ > 0 & \text{SI } |x| < 1 \\ < 0 & \text{SI } |x| > 1 \end{cases}$$

LUEGO $x = \pm 1$ SON MÁXIMOS DE LA FUNCIÓN

$f(1) = \frac{1}{1+1} = 1/2$, LUEGO

$$|f(x)| \le \frac{1}{2} \quad \text{y}$$

$$\begin{cases} 1 \le 1 & \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x)^k \le \left(\frac{1}{2}\right)^k & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

LUEGO $\sum_{\underline{\underline{k=0}}}^{\infty} \left(\frac{x^2}{x^4+1}\right)^k = 1 + \sum_{\underline{\underline{k=1}}}^{\infty} \left(\frac{x^2}{x^4+1}\right)^k \underline{\underline{\le}} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-1/2} = 2$

ASÍ POR LA PRUEBA M-WEIERSTRASS LA SERIE DE FUNCIONES CONVERGE UNIFORMEMENTE A SU LÍMITE PUNTUAL $\frac{x^4+1}{x^4-x^2+1}$ EN TODO $\mathbb{R}$..

PROBLEMA 2) $f(t) = |\operatorname{sen}(t)|$ $t \in [-\pi, \pi]$

SERIE DE FOURIER.

$f(t)$ ES PAR LUEGO LOS COEFICIENTES $b_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen} t|\, dt \underset{\text{f PAR}}{=} \frac{1}{2\pi}\, 2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\cos t \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|\operatorname{sen} t| \cos nt}_{\text{PAR}}\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \cos nt\, dt =$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \cos nt\, dt \underset{\text{PARTES}}{=} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} t \operatorname{sen} nt}{n} \Big|_0^{\pi}}_{0} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos t \operatorname{sen} nt\, dt \underset{\text{PARTES}}{=}$$

$$= -\frac{1}{n}\left[-\frac{\cos t \cos nt}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \cos nt\, dt \right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[(\cos\pi \cos n\pi - 1) + \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \cos nt\, dt \right]$$

DESPEJANDO $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \cos nt\, dt = \frac{1}{n^2}\left[(-1)^{n+1} - 1\right]$

ASÍ $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \cos nt\, dt = \begin{cases} \dfrac{-2}{n^2-1} & \text{SI } n \text{ ES PAR} \\ 0 & \text{SI } n \text{ ES IMPAR} \end{cases}$

LUEGO $a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{-2}{n^2-1}\right) & \text{SI } n \text{ ES PAR} \\ 0 & \text{SI } n \text{ ES IMPAR} \end{cases}$

LA SERIE DE FOURIER QUE BUSCAMOS ES

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi((2k)^2-1)} \cos(2kt).$$

PROBLEMA 3: Si $x_1(t) = 3e^{2t}\cos 3t + e^{-t}$

$x_2(t) = 2e^{2t}\operatorname{sen} 3t + e^{-t}$

son soluciones de una E.D.O lineal de 2º orden de coeficientes constantes

podría ser que:

$$x(t) = k_1 e^{2t}\cos 3t + k_2 e^{2t}\operatorname{sen} t \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

fuese la solución general de la E.D.O homogénea asociada

y $x_0(t) = e^{-t}$ una solución particular

tendríamos una ec característica

$$0 = (\lambda - (2+3i))(\lambda - (2-3i)) =$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 9 = \lambda^2 - 4\lambda + 13$$

con soluciones linealmente independientes de la EDO $x'' - 4x' + 13x = 0$

$$e^{2t}\cos 3t \quad \text{y} \quad e^{2t}\operatorname{sen} 3t.$$

La E.D.O buscada es del tipo

$$x''(t) - 4x'(t) + 13x(t) = f(t)$$

y con $x_0(t) = e^{-t}$, $x_0'(t) = -e^{-t}$, $x_0''(t) = e^{-t}$, es solución particular

$$e^{-t} + 4e^{-t} + 13e^{-t} = \boxed{18e^{-t} = f(t)}$$

La EDO buscada es

$$\boxed{x''(t) - 4x'(t) + 13x(t) = 18e^{-t}}$$

La solución $x(t)$ tal que $x(0) = 13$ y $x'(0) = 72$ sería

$$x(t) = k_1 e^{2t}\cos 3t + k_2 e^{2t}\operatorname{sen} 3t + e^{-t}$$

$$13 = x(0) = k_1 + 1$$

$$x'(t) = 2k_1 e^{2t}\cos 3t - 3k_1 e^{2t}\operatorname{sen} 3t + 2k_2 e^{2t}\operatorname{sen} 3t + 3k_2 e^{2t}\cos 3t - e^{-t}$$

$$72 = x'(0) = 2k_1 + 3k_2 - 1$$

Así $k_1 = 12$ y $24 + 3k_2 - 1 = 72 \Rightarrow k_2 = \frac{49}{3}$

$$\boxed{x(t) = 12e^{2t}\cos 3t + \frac{49}{3}e^{2t}\operatorname{sen} 3t + e^{-t}}$$

PROBLEMA 4:) $x^2 \equiv 1 \mod 12$.

4.1) $\mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$

$(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ tal que

$(a_1, a_2) \times (a_1, a_2) = (a_1^2, a_2^2) = (1, 1) \iff$

$a_1^2 \equiv 1 \mod 3$

$a_2^2 \equiv 1 \mod 4$

$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$, $\phi(3) = 2$, luego si $a_1 \neq 0$, $a_1 \in \mathbb{Z}_3$,

como $mcd(a_1, 3) = 1 \Rightarrow a_1^2 \equiv 1 \mod 3$

$\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, $\phi(4) = \phi(2^2) = 2^2(1 - \frac{1}{2}) = 2$.

luego si $a_2 \neq 0$, $a_2 \in \mathbb{Z}_4$ y $mcd(a_2, 4) = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \mod 4$

$a_2 = 1, 3$ (observar que $2^2 = 0 \mod 4$)

Luego las parejas buscadas son

$(1, 1)$ $(1, 3)$

$(2, 1)$ y $(2, 3)$.

4.2) como $\Psi(a) = ([a]_3, [a]_4)$ y $\Psi(a^2) = \Psi(a)\Psi(a) = (a_1, a_2) = (1,1)$

y $\Psi^{-1}(1, 1) = 1$,

necesitamos resolver

$a \equiv 1 \mod 3$, $a \equiv 1 \mod 4$ $\Rightarrow a = 1$; $a \equiv 1 \mod 3$, $a \equiv 3 \mod 4$ $\Rightarrow a \equiv 7 \mod 12$. T. CHINO

$a \equiv 2 \mod 3$, $a \equiv 1 \mod 4$ $\Rightarrow a \equiv 5 \mod 12$ T. CHINO; $a \equiv 2 \mod 3$, $a \equiv 3 \mod 4$ $\Rightarrow a \equiv 11 \mod 12$ T. CHINO

Así $a = 1, 5, 7$ ó 11 son las soluciones de $x^2 \equiv 1 \mod 12$

— · —

También se puede hacer la tabla

$\mathbb{Z}_{12}$ x	5	7
5	1	
7		1

etc.

PROBLEMA 5:

1) $p(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 + 4x \in \mathbb{Z}_5[x]$

$$p(x) = x\left[x^4 + 4x^3 + x^2 + 4\right] = x(x-1)(x^3+x+1) = \boxed{x(x+4)(x^3+x+1)}$$

$x=1$ es raíz

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 4x^3 + x^2 + 4 & x-1 \\ \hline -x^4 \quad + x^3 & x^3+x+1 \\ \hline \qquad x^2+4 & \\ \qquad -x^2+x & \\ \hline \qquad\quad x+4 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Sea $h(x) = x^3 + x + 1$ tercer grado

$h(0) = 1 \neq 0$, $h(1) = 3 \neq 0$ $h(2) = 11 \neq 0$ $h(3) = 27+3+1 = 1 \neq 0$

Luego $\underline{h}$ de tercer grado y sin raíces es $\underline{\text{irreducible}}$

2) $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$

$p'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 3 = 4x^3 + 2x^2 + 2x + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$

$mcd(p, p')$. Usamos el algoritmo de Euclides

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 4x^3 + x^2 + 3x + 3 & 4x^3 + 2x^2 + 2x + 3 \\ \hline -x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2x & 4x + 4 \\ \hline \qquad x^3 + 3x^2 + x + 3 & \\ \qquad -x^3 - 3x^2 - 3x - 2 & \\ \hline \qquad 0 + 0 + 3x + 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 4x^3 + 2x^2 + 2x + 3 & 3x+1 \\ \hline -4x^3 - 3x^2 & 3x^2 + 3x + 3 \\ \hline \qquad 4x^2 + 2x + 3 & \\ \qquad -4x^2 - 3x & \\ \hline \qquad\quad 4x + 3 & \\ \qquad\quad -4x - 3 & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Luego $3x+1 \in mcd(p, p')$, así p tiene al menos una raíz múltiple en $\mathbb{Z}_5$ $\quad 3x+1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

PROBLEMA 6: . $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5[x]/(x^n + x + c)$

1) $\mathbb{K}$ será un cuerpo de 25 elementos si $n = 2$ (así $5^2 = 25$) y el polinomio $f(x) = x^2 + x + c$, $c = \{0, 1, 3, 4\}$. ($c \neq 2$) necesario es irreducible.

$f(0) = c$ luego $c \neq 0$

$f(1) = 2 + c$ luego $c \neq 3$.

$f(2) = 4 + 2 + c = 1 + c \Rightarrow c \neq 4$

$f(3) = 9 + 3 + c = 2 + c \Rightarrow c \neq 3$

$f(4) = 16 + 4 + c \Rightarrow c \neq 0$

luego si $c = 1$ ó 2 f es irreducible; como $c \neq 2$

$\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5[x]/x^2 + x + 1$ es un cuerpo de 25 elementos.

2) ¿ $[x^2 + 2]^{-1} \in \mathbb{K} = \mathbb{Z}_5[x]/x^2+x+1$?

Observemos que $\boxed{x^2 + 2} = x^2 + x - x + 1 + 1 =$

$= -x + 1 = \boxed{4x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]}$

$x^2 + x + 1 = 0$

Ahora buscamos $ax + b \in \mathbb{Z}_5[x]$ de modo que

$1 = (4x+1)(ax+b) = a4x^2 + (a+4b)x + b =$

tiene que ocurrir que

$= 4a[4x + 4] + (a + 4b)x + b = ax + a + (a+4b)x + b =$

$x^2 = -x - 1 = 4x + 4$

$= \boxed{(2a + 4b)x + a + b}$ necesitamos que $\left.\begin{array}{l} 2a + 4b = 0 \\ a + b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Leftrightarrow$ $2a + 2b + 2b = 2 + 2b = 0 \Rightarrow b = 4$ y por tanto $a = 2$

luego $\boxed{[x^2+2]^{-1} = 2x + 4.}$