AM PRÁCTICA-1

Nombre y apellidos...

1.- Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^a \frac{1+nx}{n+x^2}dx$

Indicaciones:

- Calcula el límite puntual de la sucesión $(\frac{1+nx}{n+x^2})_n$.
- ¿Hay convergencia uniforme?
- ¿Se pueden intercambiar los símbolos de límite e integral?

LÍMITE PUNTUAL: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+nx}{n+x^2} = x$ SI $x \geq 0$.

LÍMITE UNIFORME: $\left| x - \frac{1+nx}{n+x^2} \right| = \left| \frac{\cancel{xn}+x^3-1-\cancel{nx}}{n+x^2} \right|$

$$\underset{x\in[0,a]}{\leq} \frac{|a^3-1|}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ (LA $a>0$ ES FIJA)

LUEGO LA SUCESIÓN CONVERGE UNIFORMEMENTE A $f(x)=x$ EN EL INTERVALO $[0,a]$.

AHORA COMO HAY CONVERGENCIA UNIFORME

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a \frac{1+nx}{n+x^2}dx = \int_0^a \lim_{n\to\infty} \frac{1+nx}{n+x^2}dx = \int_0^a x\,dx =$$

$$\underset{\text{INTEGRAMOS}}{=} \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a = \frac{a^2}{2}$$

2.- Dada la serie de funciones $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{3x^2+3})^k$

a): calcula su límite puntual (¿Para cada x fijo es una serie geométrica?).

b): Comprueba que la serie de funciones converge uniformemente a su límite puntual en todo $\mathbb{R}$.

$x^2 \geq 0$ LUEGO $0 < \frac{1}{3x^2+3} \leq \frac{1}{3} < 1$. LUEGO LA SERIE (FIJADA x) ES UNA SERIE GEOMÉTRICA QUE CONVERGE A $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3x^2+3)^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3x^2+3}} = \frac{3x^2+3}{3x^2+2}$

COMO CADA FUNCIÓN

$$\left(\frac{1}{3x^2+3}\right)^k \leq \left(\frac{1}{3}\right)^k \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

(Continuación 2...)

Y COMO LA SERIE GEOMÉTRICA $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^k$

ES CONVERGENTE $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-1/3} = 3/2 \right)$

LA PRUEBA M-WEIERSTRASS NOS DICE QUE

LA SERIE $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3x^2+3)^k}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE

A SU LÍMITE PUNTUAL $\frac{3x^2+3}{3x^2+2}$ EN TODO $\mathbb{R}$.

3.- Integra por partes (dos veces) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx dx$, donde $n, m \in \mathbb{N}$ son enteros.

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx \, dx} \underset{\text{PARTES}}{=} \underbrace{-\frac{\operatorname{sen} nx}{n} \operatorname{sen} mx \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{m}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx$$

$\operatorname{sen} k\pi = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$$= \frac{m}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx \underset{\text{PARTES}}{=} \frac{m}{n}\left[-\frac{\cos nx}{n} \cos mx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{m}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx \, dx \right] =$$

$$= \frac{m}{n}\left[\underbrace{-\frac{\cos n\pi}{n}\cos m\pi + \frac{\cos n\pi}{n}\cos m\pi}_{=0} \right] \boxed{- \frac{m^2}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx \, dx}$$

$\cos -\pi = \cos \pi$

DESPEJANDO $\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\right)\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx \, dx = 0$

COMO $1 + \frac{m^2}{n^2} \neq 0$ PARA CUALQUIER $m, n \in \mathbb{Z}$,

SOLO PUEDE OCURRIR QUE $\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx \, dx = 0}$