AM PRÁCTICA-5

Nombre y apellidos...

1.- Consideramos el problema de Cauchy: $\left\{ \begin{array}{c} y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t} + \frac{t}{2} \quad (*) \\ y(0) = \frac{1}{8} \quad y'(0) = 1. \end{array} \right.$

1_1.- Resuelve el problema homogéneo.
Indicación: Escribe el **polinomio característico** y halla sus raíces.

$y'' - 4y' + 4y = 0$ PROBLEMA HOMOGÉNEO: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$

Ec. característica $\lambda = 2$ raíz doble, luego

$\boxed{y(t) = k_1 e^{2t} + k_2 t e^{2t} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}}$ solución general del problema homogéneo

1_2.- Si y_1 es una solución de la ecuación $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t}$ y y_2 es una solución de la ecuación $y'' - 4y' + 4y = \frac{t}{2}$, ¿la suma $y_1 + y_2$ es una **solución particular** de la ecuación $(*)$? Sí, ya que

$$(y_1 + y_2)'' - 4(y_1 + y_2)' + 4(y_1 + y_2) = \underbrace{(y_1'' - 4y_1' + 4y_1)}_{2e^{2t}} + \underbrace{(y_2'' - 4y_2' + 4y_2)}_{t/2} =$$

$$= 2e^{2t} + t/2$$

1_3.- Calcula una solución particular y_1 de la ecuación $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t}$.
Indicación: Prueba una solución del tipo $p(t)e^{2t}$, con p un polinomio. ¿Qué grado tiene que tener p?

Como $\lambda = 2$ es raíz doble de la ec. característica tenemos que probar una solución particular y_1 del tipo $y_1(t) = A t^2 e^{2t}$

$y_1'(t) = 2At e^{2t} + 2At^2 e^{2t}$

$y_1''(t) = 2A e^{2t} + 4At e^{2t} + 4At e^{2t} + 4At^2 e^{2t}$

Entrando en la ec. con y_1

$$2A e^{2t} + \cancel{8At e^{2t}} + \cancel{4At^2 e^{2t}} - 4(\cancel{2At e^{2t}} + \cancel{2At^2 e^{2t}}) + \cancel{4At^2 e^{2t}} =$$

$$= 2Ae^{2t} \underset{\text{forzando la igualdad}}{=} 2e^{2t} \quad \text{luego} \quad A = 1$$

$\boxed{y_1 = t^2 e^{2t}}$

1_4.- Calcula una solución particular y_2 de la ecuación $y'' - 4y' + 4y = \frac{t}{2}$.
Indicación: Prueba una solución del tipo $y_2(t) = p(t)$, con p un polinomio. ¿Qué grado tiene que tener p?

Como $\lambda = 0$ no es raíz de la ec característica

probamos una solución particular del tipo

$y_2(t) = At + B$

$y_2'(t) = A \qquad y_2''(t) = 0$

Entrando en la ec.

$-4A + 4(At + B) = 4At + (-4A + 4B) = t/2$

juntando e igualando

Luego $\quad 4A = 1/2$
$\quad -4A + 4B = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{8} \\ B = 1/8 \end{cases}$

Luego $y_2 = \frac{1}{8}t + 1/8$ es la solución buscada.

1_5.- Escribe la **solución general** de la ecuación $(*)$. $y(t) = y_1 + y_2 +$ solución homogénea $=$

$$= t^2 e^{2t} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{8} + k_1 e^{2t} + k_2 t e^{2t} \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

1_6.- ¿De las soluciones de $(*)$ cuál es la única que verifica que $y(0) = \frac{1}{8}$ y $y'(0) = 1$?
Indicación: Plantea un sistema lineal de ecuaciones con la solución general de 1_5 y las condiciones iniciales $y(0) = \frac{1}{8}$ y $y'(0) = 1$.

$1/8 = y(0) = \frac{1}{8} + k_1$ luego $k_1 = 0$ y así

$y(t) = t^2 e^{2t} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{8} + k_2 t e^{2t}$ ∴ derivando

$y'(t) = 2te^{2t} + 2t^2 e^{2t} + \frac{1}{8} + k_2 e^{2t} + 2k_2 t e^{2t}$ evaluando

$1 = y'(0) = \frac{1}{8} + k_2 \Rightarrow \boxed{k_2 = \frac{7}{8}}$ luego la

solución buscada es

$$\boxed{y(t) = t^2 e^{2t} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{8} + \frac{7}{8} t e^{2t}}$$