AM PRÁCTICA-9

Nombre y apellidos...

1.- Sea $G = \{[0,], [2], [3], [6]\} \subset \mathbb{Z}_8$. ¿Por qué $(G, +)$ y $(G, \times)$ no forman un grupo?

- $(G +)$ NO ES UN GRUPO YA QUE NO EXISTE $-[3] = [5] \notin G$.

- $(G \times)$ NO ES UN GRUPO YA QUE NO TIENE UNIDAD $[1]$

2.- Calcula el orden de los elementos de $(\mathbb{Z}_8^*, \times)$. ¿Cuáles son generadores de $\mathbb{Z}_8^*$.

$|\mathbb{Z}_8^*| = \phi(8) = \phi(2^3) = 2^3(1-\frac{1}{2}) = 4$; $\mathbb{Z}_8^* = \{[1]\ [3]\ [5]\ [7]\}$.

ord 1 = 1
ord 3 = 2 YA QUE $[3]^2 = [9] = [1]$ $\quad 9 \equiv 1 \mod 8$
ord 5 = 2 YA QUE $[5]^2 = [25] = [1]$ $\quad 25 \equiv 1 \mod 8$
ord 7 = 2 YA QUE $[7]^2 = [49] = [1]$ $\quad 49 \equiv 1 \mod 8$

$(\mathbb{Z}_8^* \times)$ NO ES UN GRUPO CÍCLICO; NO TIENE GENERADORES.

3.- Sea G un grupo con orden $|G|$ primo. Prueba que G es un grupo cíclico.

SEA $|G| = p > 1$ Y SEA $a \in G$. SEA $d = \text{ord}\, a$.
ENTONCES $\{a, a^2, \dots, a^d = e\} \leq G$ ES UN SUBGRUPO DE G. POR EL TEOREMA DE LAGRANGE EL ORDEN DEL SUBGRUPO $\{a, a^2, \dots, a^d\}$ QUE ES d, DIVIDE A p

$d \mid p \Rightarrow d = 1$ Ó $d = p$ (POR SER p PRIMO)

ASÍ $a \equiv e$ LA UNIDAD O BIEN a ES UN GENERADOR DE G. ES MÁS, TODO $a \in G \setminus \{e\}$ ES UN GENERADOR DE G.

4.- ¿Qué subgrupos tiene $(\mathbb{Z}_{31}+)$? ¿Cuáles de los elementos de $\mathbb{Z}_{31}$ generan todo el grupo?

$|\mathbb{Z}_{31}| = 31$ QUE ES PRIMO, POR TANTO (VER PROBLEMA ANTERIOR) $(\mathbb{Z}_{31}+)$ ES CÍCLICO Y TODO $a \in \mathbb{Z}_{31}\setminus\{0\}$ GENERA EL GRUPO. LOS ÚNICOS SUBGRUPOS DE $\mathbb{Z}_{31}$ SON $\{0\}$ Y EL MISMO $\mathbb{Z}_{31}$

4.- Calcula la lista completa de los grupos abelianos finitos (salvo isomorfismo) de orden menor o igual a 16.

4_1.- ¿Cuáles son grupos cíclicos?

Indicación: ¿Cómo son los grupos cíclicos finitos? Recuerda que todo grupo de orden primo es cíclico.

$(\mathbb{Z}_1+)$ $(\mathbb{Z}_2+)$ $(\mathbb{Z}_3+)$ ..... $(\mathbb{Z}_{15}+)$, $(\mathbb{Z}_{16}+)$

SON GRUPOS CÍCLICOS DE ORDEN MENOR O IGUAL A 16

4_2.- Encuentra los grupos abelianos finitos **no** cíclicos trabajando con el orden del grupo.

Indicación: Si $|G| = n \leq 16$ y n no es primo y **no** se da que $n = k_1 \times k_2$ con $m.c.d.(k_1, k_2) = 1$, entonces ...etc.

SI $|G| = 1, 2, 3, 5, 7, 11$, ó 13 POR SER PRIMOS SON CÍCLICOS Y LOS TEOREMAS ANTERIORES

POR EL TEOREMA DE CLASIFICACIÓN

SI $|G| = 4 \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

SI $|G| = 6 \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$ CÍCLICO

SI $|G| = 8 \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ O BIEN $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

SI $|G| = 9 \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

SI $|G| = 10 \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{10}$ CÍCLICO

SI $|G| = 12 \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$

SI $|G| = 14 \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}_{14}$ CÍCLICO

SI $|G| = 15 \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{15}$ CÍCLICO

SI $|G| = 16 \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$ O BIEN $G \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$