AM PRÁCTICA-11

Nombre y apellidos..

1.- Calcula el máximo común divisor (mónico) de los polinomios $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$ y $g(x) = x^2 + x - 1$ de $\mathbb{Z}_3[x]$. Exprésalo en la forma $a(x)f(x) + b(x)g(x) = m.c.d.(f,g)$.

APLICAMOS EL ALGORITMO DE EUCLIDES

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3+x^2+x & x^2+x-1 \\ \hline -x^4-x^3+x^2 & x^2+2 \\ \quad 2x^2+x & \\ \quad -2x^2-2x+2 & \\ \quad\quad 2x+2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2+x-1 & 2x+2 \\ \hline -x^2-x & 2x \\ \quad 2 & \end{array}$$

r_i	$x^4+x^3+x^2+x$	x^2+x-1	$2x+2$	2
q_i		x^2+2	$2x$	$x+1$
α_i	1	0	1	x
β_i	0	1	$2x^2+1$	$1-(2x)(2x^2+1) = 2x^3+x+1$

LUEGO $m.c.d(f,g) = 2$ Y LA IDENTIDAD DE BEZOUT ES

$$2 = x(x^4+x^3+x^2+x) + (2x^3+x+1)(x^2+x-1) = \cancel{x^5}+\cancel{x^4}+\cancel{x^3}+\cancel{x^2}$$

COMPROBACIÓN

$$+\cancel{2x^5}+\cancel{x^3}+\cancel{x^2}+\cancel{2x^4}+\cancel{x^2}+\cancel{x}-\cancel{2x^3}-\cancel{x}-1 = -1 = 2$$

2.- Se considera el polinomio $x^6 + 4x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2$ en $\mathbb{Z}_5[x]$. Determina si tiene raíces múltiples. Si las tiene, determina al menos una.

SEA $f(x) = x^6+4x^5+3x^4+x^3+x^2+2x+2$

DERIVANDO

$f'(x) = 6x^5+20x^4+12x^3+3x^2+2x+2 = x^5+2x^3+3x^2+2x+2$

CALCULAMOS EL $m.c.d(f, f')$ USAMOS EL ALG. DE EUCLIDES

(1)
$$\begin{array}{l|l} x^6+4x^5+3x^4+x^3+x^2+2x+2 & x^5+2x^3+3x^2+2x+2 \\ \hline -x^6 \quad -2x^4-3x^3-2x^2-2x & x+4 \\ \quad 4x^5+x^4+3x^3+4x^2+2 & \\ \quad -4x^5 \quad -3x^3-2x^2-3x-3 & \\ \quad\quad x^4+2x^2+2x+4 & \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{l|l} x^5+2x^3+3x^2+2x+2 & x^4+2x^2+2x+4 \\ \hline -x^5-2x^3-2x^2-4x & x \\ \quad x^2+3x+2 & \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{l|l} x^4+2x^2+2x+4 & x^2+3x+2 \\ \hline -x^4-3x^3-2x^2 & x^2+2x+4 \\ \quad 2x^3+2x+4 & \\ \quad -2x^3-x^2-4x & \\ \quad\quad 4x^2+3x+4 & \\ \quad\quad -4x^2-2x-3 & \\ \quad\quad\quad x+1 & \end{array}$$

(5)
$$\begin{array}{l|l} x^2+3x+2 & x+1 \\ \hline -x^2-x & x+2 \\ \quad 2x+2 & \\ \quad -2x-2 & \\ \quad\quad 0 & \end{array}$$

LUEGO $mcd(f, f') = x + 1$

continuación.....

ASÍ $x+1 \mid f$ y $x+1 \mid f'$

f TIENE RAÍCES MÚLTIPLES. AL MENOS UNA DE ELLAS ES $x = 4$ YA QUE ES RAÍZ DE $x+1=0$.

3.- Da un ejemplo de un polinomio irreducible mónico de grado 2 en $\mathbb{Z}_5[x]$.

TOMAMOS $f(x) = x^2 + x + b$ UN POLINOMIO MÓNICO DE GRADO 2 EN $\mathbb{Z}_5[x]$

SI $x=0$ $f(0) = b$ TOMAMOS $b \neq 0$

SI $x=1$ $f(1) = 2 + b$ " $b \neq 3$

SI $x=2$ $f(2) = 4+2+b = 1+b$ TOMAMOS $b \neq 4$

SI $x=3$ $f(3) = 9+3+b = 2+b$ " $b \neq 3$

SI $x=4$ $f(4) = 16+4+b = b$ " $b \neq 0$

SI TOMAMOS $f(x) = x^2+x+1$ ó bien $f(x) = x^2+x+2$ SON IRREDUCIBLES EN $\mathbb{Z}_5[x]$

4.- Comprueba que $f(x) = x^2 + x + 2$ es un polinomio irreducible de $\mathbb{Z}_3[x]$. Calcula todas las raíces de este polinomio en el cuerpo $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_3[x]/ < f >$.

(**Indicaciones:** 1ª Usa el Teorema de Kronecker. 2ª Divide por $x - \alpha$ en $\mathbb{F}[x]$ donde α es la clase de la $[x]$).

$f(x) = x^2+x+2$ TIENE GRADO 2. SI FUESE REDUCIBLE TENDRÍA ALGUNA RAÍZ, PERO

$f(0) = 2 \neq 0$ $f(1) = 1+1+2 = 1 \neq 0$ y $f(2) = 4+2+2 = 2 \neq 0$

ASÍ f ES IRREDUCIBLE y $\mathbb{Z}_3[x]/_{<f>} = \mathbb{F}$ ES UN CUERPO y

$\alpha = [x]$ ES UNA RAÍZ DE f EN $\mathbb{F}$ (TEOREMA DE KRONECKER)

SI DIVIDIMOS f ENTRE $x - \alpha$ $\Rightarrow f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$.

y ASÍ α y β SON LAS RAÍCES DE f EN $\mathbb{F}$

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 + x + 2 & x - \alpha \\
\cline{2-2}
-x^2 + \alpha x & x + (1+\alpha) \\
\hline
(1+\alpha)x + 2 & \\
-(1+\alpha)x - 2 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$-\alpha = 2\alpha$

$$
\begin{array}{r}
1+\alpha \\
2\alpha \\
\hline
2\alpha + 2\alpha^2 =
\end{array}
$$

$= 2(\alpha+\alpha^2) = 2$

YA QUE $\alpha^2+\alpha+2=0$

$\Rightarrow \alpha^2+\alpha = -2 = 1$

LUEGO $f(x) = x^2+x+2 =$

$= (x-\alpha)(x-(2+2\alpha))$

ASÍ $x=\alpha$ y $x = 2+2\alpha$

SON LAS RAÍCES DE f EN $\mathbb{F}$.

	1	2	α	2α	$\alpha+1$	$\alpha+2$	$2\alpha+1$	$2\alpha+2$
1								
2								
α								
2α								
$\alpha+1$			1	2				
$\alpha+2$								
$2\alpha+1$								
$2\alpha+2$								