# EXAMEN FINAL. AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS.
**17 de Enero de 2024.**

**1.-** Estudia la convergencia puntual y uniforme en los intervalos $[0, +\infty)$ y $[a, +\infty)$, con $a > 0$, de la siguiente sucesión de funciones:

$$f_n(x) = \left(e^{-n^2x^2}\right)_{n=1}^{\infty}$$

**2.-** Calcula la transformada de Fourier de $f(x) = e^{-2|x|}$, donde $x \in \mathbb{R}$.

**3.-** Resuelve el siguiente problema de valores iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = 3\,\mathrm{sen}(2x) - \cos(2x) \\ \\ y(0) = \frac{11}{17},\ y'(0) = 0 \end{array}\right\}$$

**4.-** ¿Qué número es $5^{111}7^{12}$ en $\mathbb{Z}_6$?

**5.-** Dados los grupos $(\mathbb{Z}_8^*, \times)$ (unidades de $\mathbb{Z}_8$), $(\mathbb{Z}_7^*, \times)$ (unidades de $\mathbb{Z}_7$) y $(\mathbb{Z}_7^* \times \mathbb{Z}_8^*, \times)$, asocia a cada uno de ellos con otro entre los grupos siguientes, de modo que como grupos los dos asociados sean iguales:

$$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +), \qquad (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +), \qquad (\mathbb{Z}_6, +),$$

$$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6, +), \qquad (\mathbb{Z}_4, +), \qquad \text{y} \qquad (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}, +).$$

Justifica tu respuesta.
**Indicación:**Piensa en los ordenes de los elementos de cada grupo. Solo hay una única forma de emparejamiento.

**6.-** Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3[x]/ < x^2 + x - 1 >$:

1. Comprueba que es un cuerpo finito.¿Cuáles son sus elementos? ¿Cuántos tiene?
2. Calcula $(x-1)^{1602} \in \mathbb{K}$.
3. Invierte $(x-1)^{1602}$ y encuentra $q(x) \in \mathbb{K}$ de modo que

$$(x-1)^{1602}q(x) = x \qquad \text{en} \qquad \mathbb{K}.$$

**Observaciones:** Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.
**Revisión del examen:**
.- **Presencial .**
.- Las soluciones del examen se podrán consultar en: http://blogs.mat.ucm.es/cruizb/inicio/docencia-curso-22-23/ampliacion-de-matematicas/examenes-de-am/
**La revisión del examen se efectuará el día 25 de Enero a las 16h en el aula 16. No es obligatorio solicitar la revisión.**

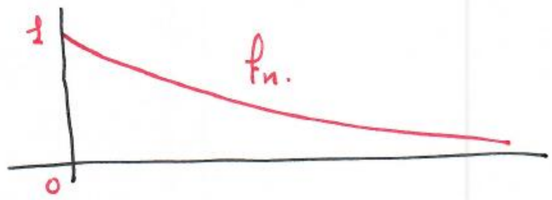
# EXAMEN

**PROBLEMA 1:** $f_n(x) = \left(e^{-n^2x^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ $\quad x \geq 0$

DIBUJAMOS LAS GRÁFICAS DE $f_n(x) = e^{-n^2x^2}$ $\quad x \geq 0$

$f_n(0) = 1$, $f_n$ es continua y $\lim_{x\to\infty} e^{-n^2x^2} = 0$

$f_n'(x) = -n^2 2x e^{-n^2x^2} < 0$ si $x > 0$. Luego $f_n$ es decreciente.




– Límite puntual:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-n^2x^2} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$


– Convergencia uniforme. $f_n$ es continua en $[0,\infty)$

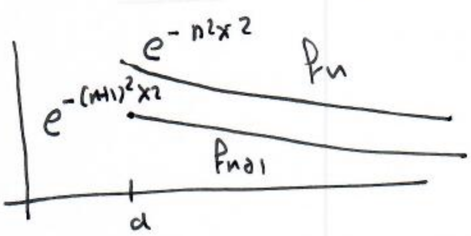
Dado que cada $f_n$ es continua en todo $[0,\infty)$

y $f_n$ NO es continua en $x=0$, f NO puede ser

no es continua en $x = 0$,

el límite uniforme de $f_n$ en $[0,\infty)$.

Por otro en el intervalo $[a,\infty)$




$|0 - f_n(x)| \leq f_n(a)$ si $x \geq a$

ya que $f_n$ es decreciente.

Así $|f_n(x)| \leq f_n(a) = e^{-n^2a^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

lo que prueba la convergencia uniforme de la sucesión en $[a,\infty)$.

EXAMEN

PROBLEMA 2: $f(x) = e^{-2|x|} \quad x \in \mathbb{R}$. ¿ $\hat{f}$ ?

POR DEFINICIÓN $\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} (\cos \lambda x - i \operatorname{sen} \lambda x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} \cos \lambda x \, dx - i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} \operatorname{sen} \lambda x \, dx =$$

COMO $e^{-2|x|}$ ES PAR Y $\operatorname{sen}\lambda x$ ES IMPAR

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} \operatorname{sen} \lambda x \, dx = 0$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} \cos \lambda x \, dx \underset{e^{-2|x|}\cos\lambda x \text{ PAR}}{=} \boxed{2 \int_{0}^{\infty} e^{-2x} \cos \lambda x \, dx} \underset{\text{POR PARTES}}{=}$$

$$2 \left[ \underbrace{\frac{e^{-2x}}{-2} \cos \lambda x \Big|_0^\infty}_{=1} - \lambda \int_0^\infty \frac{e^{-2x}}{2} \operatorname{sen} \lambda x \, dx \right] =$$

$$= 1 - \lambda \int_0^\infty e^{-2x} \operatorname{sen} \lambda x \, dx \underset{\text{PARTES}}{=} 1 - \lambda \left[ \underbrace{\frac{e^{-2x}}{-2} \operatorname{sen} \lambda x \Big|_0^\infty}_{=0} + \lambda \int_0^\infty \frac{e^{-2x}}{2} \cos \lambda x \, dx \right]$$

$$\boxed{= 1 - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^\infty e^{-2x} \cos \lambda x \, dx}$$

DESPEJANDO

$$\left(2 + \frac{\lambda^2}{2}\right) \int_0^\infty e^{-2x} \cos \lambda x \, dx = 1$$

LUEGO $2 \int_0^\infty e^{-2x} \cos \lambda x \, dx = 2 \dfrac{1}{2 + \frac{\lambda^2}{2}} = \dfrac{4}{4+\lambda^2}$

ASÍ $\hat{f}(x) = \dfrac{4}{4+\lambda^2}$

# EXAMEN

**PROBLEMA 3:** $y'' - 2y' + 5y = 3\,\text{sen}\,2x - \cos 2x$

$$\begin{cases} y(0) = \dfrac{11}{17}, & y'(0) = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{EC CARACTERÍSTICA}}$ DE LA E.D.O HOMOGÉNEA ASOCIADA

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \qquad \lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \dfrac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$

SOLUCIÓN GENERAL DE LA HOMOGÉNEA

$$y(x) = Ae^{x}\cos 2x + Be^{x}\,\text{sen}\,2x \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{SOLUCIÓN PARTICULAR}}$; COMO $2i$ NO ES RAÍZ DE LA EC CARACTERÍSTICA, PODEMOS PROBAR UNA SOLUCIÓN DEL TIPO

$$y_0(x) = A\,\text{sen}\,2x + B\cos 2x$$

$$y_0'(x) = 2A\cos 2x - 2B\,\text{sen}\,2x$$

$$y_0''(x) = -4A\,\text{sen}\,2x - 4B\cos 2x$$

ENTRANDO EN LA E.D.O CON $y_0$

$$-4A\,\text{sen}\,2x - 4B\cos 2x - 2(2A\cos 2x - 2B\,\text{sen}\,2x) +$$

$$+ 5(A\,\text{sen}\,2x + B\cos 2x) =$$

$$= (-4A\,\text{sen}\,2x + 4B\,\text{sen}\,2x + 5A\,\text{sen}\,2x) +$$

$$+ (-4B\cos 2x - 4A\cos 2x + 5B\cos 2x) =$$

$$= (A + 4B)\,\text{sen}\,2x + (-4A + B)\cos 2x = 3\,\text{sen}\,2x - \cos 2x$$

LUEGO $\begin{cases} A + 4B = 3 \\ -4A + B = -1 \end{cases} \qquad B = 4A - 1$

$A + 4(4A - 1) =$
$= 17A - 4 = 3$
$A = \dfrac{7}{17}$

$B = \dfrac{28}{17} - 1 = \dfrac{11}{17}$

$\boxed{\text{SOLUCIÓN GENERAL DE LA EDO}}$

$$y(x) = \frac{7}{17}\,\text{sen}\,2x + \frac{11}{17}\cos 2x + Ae^{x}\cos 2x + Be^{x}\,\text{sen}\,2x$$

EXAMEN

PROBLEMA 3: PROBLEMA DE VALORES INICIALES

$$\frac{11}{17} = y(0) = \frac{11}{17} + A \Rightarrow A = 0$$

ASÍ $y(x) = \frac{7}{17}\operatorname{sen}2x + \frac{11}{17}\cos 2x + Be^{x}\operatorname{sen}2x$

$$y'(x) = \frac{14}{17}\cos 2x - \frac{22}{17}\operatorname{sen}2x + Be^{x}\operatorname{sen}2x + 2Be^{x}\cos x$$

$$0 = y'(0) = \frac{14}{17} + 2B \Rightarrow B = \frac{-7}{17}$$

LUEGO LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ES

$$\boxed{y(x) = \frac{7}{17}\operatorname{sen}2x + \frac{11}{17}\cos 2x - \frac{7}{17}e^{x}\operatorname{sen}2x}$$

PROBLEMA 3: USANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$\mathcal{L}(y''(x) - 2y'(x) + 5y(x))(s) = \mathcal{L}(3\operatorname{sen}2x - \cos 2x)(s)$$

$$\mathcal{L}y''(x)(s) - 2\mathcal{L}y'(s) + 5\mathcal{L}y(s) =$$

# $\mathcal{L}(y''(x) - 2y'(x) + 5y(x))(s) = \mathcal{L}y''(x)(s) - 2\mathcal{L}y'(s) + 5\mathcal{L}y(s) =$

$$= s^2\mathcal{L}y(x) - s\,y(0) - y'(0) - 2[s\mathcal{L}y(s) - y(0)] + 5\mathcal{L}y(s) =$$

$$= [s^2 - 2s + 5]\mathcal{L}y(s) - \frac{11}{17}s + \frac{22}{17}$$

# $\mathcal{L}(3\operatorname{sen}2x - \cos 2x)(s) = 3\mathcal{L}(\operatorname{sen}2x)(s) - \mathcal{L}(\cos 2x)(s) \underset{\text{TABLAS}}{=}$

$$= 3\frac{2}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+4} = \frac{6-s}{s^2+4}$$

DESPEJANDO SE TIENE QUE

$$\boxed{\mathcal{L}y(s)} = \left(\frac{6-s}{s^2+4} + \frac{11}{17}s - \frac{22}{17}\right)\frac{1}{s^2-2s+5}$$

$$= \left[\frac{1}{17}\frac{17(6-s)}{s^2+4} + \frac{(s^2+4)(11s-22)}{(s^2+4)\,17}\right]\cdot\frac{1}{s^2-2s+1+4} =$$

$$= \frac{102 - 17s + 11s^3 - 22s^2 + 44s - 88}{17(s^2+4)[(s-1)^2+4]} = \boxed{\frac{11s^3 - 22s^2 + 27s + 14}{17(s^2+4)[(s-1)^2+4]}}$$

SOLUCIÓN TRANSFORMADA.

EXAMEN

PROBLEMA 3:) PROBLEMA INVERSO

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{11s^3 - 22s^2 + 27s + 14}{17(s^2+4)[(s-1)^2+4]} = \quad ¿y(x)?$$

$$= \frac{1}{17}\left[\frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{(s-1)^2+4}\right]$$

FRACCIONES SIMPLES

$$\frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{(s-1)^2+4} = \frac{(As+B)(s^2-2s+5) + (s^2+4)(Cs+D)}{(s^2+4)((s-1)^2+4)} =$$

$$= \frac{1}{(s^2+4)[(s-1)^2+4]}\left[As^3 - 2As^2 + 5As + Bs^2 - 2Bs + 5B + Cs^3 + Ds^2 + 4Cs + 4D\right]$$

$$= \frac{1}{(s^2+4)((s-1)^2+4)}\left[(A+C)s^3 + (-2A+B+D)s^2 + (5A-2B+4C)s + 5B + 4D\right]$$

PARA OBTENER LA IGUALDAD

$$\left.\begin{aligned} A + C &= 11 \\ -2A + B + D &= -22 \\ 5A - 2B + 4C &= 27 \\ 5B + 4D &= 14 \end{aligned}\right\}$$

RESOLVEMOS EL SISTEMA POR GAUSS $\Longleftrightarrow$

$$\left\{\begin{aligned} A + C &= 11 \\ B + 2C + D &= 0 \\ -2B - C &= -28 \\ 5B + 4D &= 14 \end{aligned}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} A + C &= 11 \\ B + 2C + D &= 0 \\ 3C + 2D &= -28 \\ -10C - D &= 14 \end{aligned}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} A + C &= 11 \\ B + 2C + D &= 0 \\ -17C &= 0 \Rightarrow C = 0 \\ -10C - D &= 14 \end{aligned}\right.$$

$A = 11$

$B = 14$

$D = -14$

ASÍ $$\frac{11s^3 - 22s^2 + 27s + 14}{17(s^2+4)[(s-1)^2+4]} = \frac{1}{17}\left[\frac{11s}{s^2+4} + \frac{14}{s^2+4} - \frac{14}{(s-1)^2+4}\right]$$

MIRANDO EN LAS TABLAS

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{1}{17}\left\{11\cos 2x + 7\operatorname{sen} 2x - 7e^x \operatorname{sen} 2x\right]$$

SOLUCIÓN OBTENIDA ANTERIORMENTE.

EXAMEN

PROBLEMA 4:] $5^{111}7^{12} \equiv x \mod 6$

$$\mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \qquad \varphi \text{ ISOMORFISMO}$$

$$a \longrightarrow ([a]_2, [a]_3)$$

$$\varphi(5^{111}7^{12}) = ([5]_2^{111}[7]_2^{12}, [5]_3^{111}[7]_3^{12}) =$$

AHORA 5 y 7 NO TIENEN DIVISORES COMUNES CON 2 NI CON 3, LUEGO

$$= ([1]_2^{111}[1]^{12}, [2]_3^{111}[1]_3^{12}) =$$

$$= ([1]_2, [2^{111}]_3) =$$

COMO $\phi(3)=2$ (FUNCIÓN DE EULER) $2^2 \equiv 1 \mod 3$

LUEGO $111 = 55 \times 2 + 1$, ASÍ

$$= ([1]_2, [(2^2)^{55} \cdot 2]_3) = ([1]_2, [2]_3)$$

BUSCAMOS $\varphi^{-1}([1]_2, [2]_3) = x$

ES DECIR $x \equiv 1 \mod 2$ $\boxed{\text{CLARAMENTE } x \equiv 5 \mod 6}$

$x \equiv 2 \mod 3$

O TAMBIÉN USANDO EL TEOREMA DEL RESTO CHINO

$$x = 1 \times 3 + 2 \times 2 \times 2 = 3 + 8 \equiv 11 \equiv 5 \mod 6.$$

— o —

<u>MÁS FÁCIL</u> $7 \equiv 1 \mod 6$ LUEGO

$5^{111}7^{12} = 5^{111}$

$mcd(5,6) = 1$ y $\phi(6) = \phi(2)\phi(3) = 2$

LUEGO $5^2 \equiv 1 \mod 6$ TEOREMA DE EULER

ASÍ $5^{111} = 5^{2 \times 55 + 1} = (5^2)^{55} \cdot 5 = 1 \times 5 = 5 \mod 6.$

EXAMEN

PROBLEMA 5: $|\mathbb{Z}_8^* \times| = \phi(8) = 2^3(1-\frac{1}{2}) = 4$

$|\mathbb{Z}_7^* \times| = \phi(7) = 6$

$|\mathbb{Z}_7^* \times \mathbb{Z}_8^*| = 6 \cdot 4 = 24$

Por otro lado $|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2| = |\mathbb{Z}_4| = 4$

$|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3| = |\mathbb{Z}_6| = 6$

$|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6| = |\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}| = 24$

- $(\mathbb{Z}_8^* \times)$ solo puede relacionarse con $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ó con $\mathbb{Z}_4$

$\mathbb{Z}_8^* = \{1, 3, 5, 7\}$ y ord $3 = 2$ $(3^2 = 9 \equiv 1 \mod 8)$
ord $5 = 2$ $(5^2 = 25 \equiv 1 \mod 8)$
ord $7 = 2$ $(7^2 = 49 \equiv 1 \mod 8)$

Como $\mathbb{Z}_4$ es cíclico, deducimos que $\mathbb{Z}_8^* \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

- $\mathbb{Z}_7^*$ solo puede relacionarse con $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ó $\mathbb{Z}_6$

$\mathbb{Z}_7^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ son las unidades del cuerpo finito $\mathbb{Z}_7$ (7 primo) luego $(\mathbb{Z}_7^* \times)$ es un grupo cíclico

por tanto $\mathbb{Z}_7^* \cong \mathbb{Z}_6$

- $\boxed{\mathbb{Z}_8^* \times \mathbb{Z}_7^*} \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_6 =$
$= \boxed{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6}$

o también $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$ tiene elemento de orden 12, por ejemplo $(0, 1)$.

Si $(a, b) \in \mathbb{Z}_8^* \times \mathbb{Z}_7^* \Rightarrow \underset{\mathbb{Z}_8^*}{\text{ord}\, a} \leq 2$ y $\underset{\mathbb{Z}_7^*}{\text{ord}\, b} \leq 6$

luego mcm $(2, 6) = 6 < 12$, y por tanto

$\mathbb{Z}_8^* \times \mathbb{Z}_8^* \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6.$

# EXAMEN

**PROBLEMA 6:**

$f(x) = x^2 + x - 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$

tiene grado 2 y no tiene raíces en $\mathbb{Z}_3$

ya que $\quad f(0) = -1 = 2 \neq 0$

$f(1) = 1 \neq 0$

$f(2) = 4 + 2 - 1 = 2 \neq 0$

# Luego $f(x)$ es irreducible, por tanto $\mathbb{Z}_3[x]/f$ es un cuerpo

de $3^2 = 9$ elementos

$\mathbb{Z}_3[x]/f = \{0, 1, 2, x, 1+x, 2+x, 2x, 1+2x, 2+2x\}$.

# $(x-1)^{1602} \in \mathbb{K}$ El grupo multiplicativo $\mathbb{K}^* = \mathbb{Z}_3[x]/f \setminus \{0\}$ tiene 8 elementos y por tanto

$\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad a^8 \equiv 1$, luego

Así $\quad 1602 \,\underline{|\, 8}$
$\quad\;\; 002 \quad 200$

$$(x-1)^{1602} = (x-1)^{200 \times 8 + 2} = \left((x-1)^8\right)^{200}(x-1)^2 = (x-1)^2$$

Ahora $\quad (x-1)^2 = (x-1)(x-1) = x^2 - 2x + 1 = x^2 + x + 1$

Como $\quad 0 = x^2 + x + 2 = x^2 + x + 1 + 1$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + x + 1 = -1 = 2}$$

# $(x-1)^{1602} = 2$, luego $2^{-1} = 2$.

Así $\quad (x-1)^{1602} q(x) = x \quad$ en $\mathbb{K}$, multiplicando

por 2 $\quad 2(x-1)^{1602} q(x) = q(x)$

y $2x$.

Luego $\quad q(x) = 2x$.