AVR PRÁCTICA-Preliminar-1

Nombre y apellidos..

1.- Sean $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ¿Sabrías probar que no son números racionales? Supongamos que si. Prueba que $\sqrt{2} - \sqrt{3} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

SEA $a = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ Y SUPONGAMOS QUE $a \in \mathbb{Q}$ LUEGO $a^2 = 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{a^2 - 5}{2} = \sqrt{6} \in \mathbb{Q}$.. PERO ESTO NO ES CIERTO, $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$. LUEGO $\sqrt{2} - \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. (SI $\frac{p^2}{q^2} = 6 \Rightarrow 6 \mid p$, Y TAMBIÉN QUE $6 \mid q$ LO CUAL NO ES POSIBLE).

2.- Encuentra un polinomio P con coeficientes en $\mathbb{Z}$ ($P \in \mathbb{Z}[x]$) de modo que

$$P(1 - \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}) = 0.$$

SEA $a = 1 - \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$

ASÍ $(1-a)^3 = 2 + \sqrt{5} \iff ((1-a)^3 - 2)^2 - 5 = 0$ OPERANDO

$(1-a)^6 - 4(1-a)^3 + 4 - 5 = (1-a)^3[(1-a)^3 - 4] - 1 = 0$, LUEGO

$0 = (1 - 3a + 3a^2 - a^3)[-a^3 + 3a^2 - 3a - 3] - 1 = a^6 - 6a^5 + 18a^4 - 16a^3 + 3a^2 + 6a - 4$

EL POLINOMIO BUSCADO ES $P(x) = x^6 - 6x^5 + 18x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 6x - 4$

3.- Sean la parábola $f(x) = 2 - x^2$ y las rectas $r_1(x) = -7x + 7$ y $r_2(x) = -7x + a_2$. Fijándote en la siguiente figura

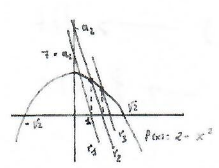


FIGURA 1

encuentra una sucesión que se acerque a $\sqrt{2}$. ¿Puedes probar que la sucesión converge a $\sqrt{2}$?

SEA $x_1 = 1$. LA RECTA DE PENDIENTE -7 QUE PASA POR $(1,0)$ ES $r_1(x) = -7x + 7$ Y $f(1) = 1$

LA RECTA DE PENDIENTE -7 QUE PASA POR $(1,1)$ ES LA RECTA $r_2(x) = -7x + 8$ Y $0 = r_2(x) = -7x + 8$ SI $x = \frac{8}{7}$

SEA $x_2 = \frac{8}{7}$; r_3 ES LA RECTA DE PENDIENTE -7 QUE PASA POR $(x_2, f(x_2)) = (x_2, 2 - x_2^2)$

LUEGO $2 - x_2^2 = r_3(x_2) = -7x_2 + a_3 \Rightarrow a_3 = 2 - x_2^2 + 7x_2$

Y EL PUNTO DE CORTE DE r_3 CON EL EJE $y = 0$ ES

$0 = r_3(x) = -7x + 2 - x_2^2 + 7x_2$ LUEGO

$$x = \frac{2 - x_2^2 + 7x_2}{7} = \boxed{x_2 + \frac{2 - x_2^2}{7} = x_3}$$

$$\boxed{\text{DEFINIMOS } x_n = x_{n-1} + \frac{2 - x_{n-1}^2}{7} \text{ SI } n \geq 2 \text{ Y } x_1 = 1}$$

VEAMOS QUE ESTA SUCESIÓN ES CRECIENTE Y ACOTADA.

continuación....

1:) $x_n \le \sqrt{2}$ $\forall n$. PARA $x_1 = 1 \le \sqrt{2}$

SUPONGAMOS QUE $x_{n-1} \le \sqrt{2}$ Y PROCEDAMOS POR INDUCCIÓN.

$$\sqrt{2} \ge x_n = x_{n-1} + \frac{2-(x_{n-1})^2}{7} \iff$$

$$7\sqrt{2} \ge 7x_{n-1} + 2 - (x_{n-1})^2 \iff 7(\sqrt{2} - \cancel{x_{n-1}}) \ge (2-(x_{n-1}))^2 =$$

$$= (\sqrt{2} + x_{n-1})(\sqrt{2} - \cancel{x_{n-1}})$$

$\iff 7 \ge \sqrt{2} + x_{n-1}$ LO CUAL ES CIERTO YA QUE $x_{n-1} < \sqrt{2}$ Y $2\sqrt{2} \le 7$.

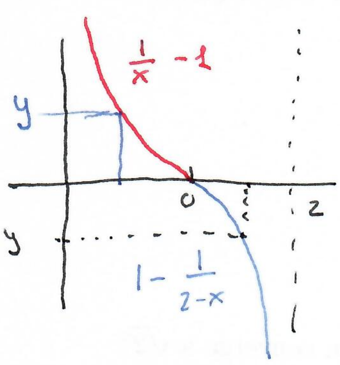
2:) COMO $x_{n-1} \le \sqrt{2}$ $\forall n$ $\frac{2-(x_{n-1})^2}{7} > 0 \Rightarrow$

$x_n = x_{n-1} + \frac{2-(x_{n-1})^2}{7} \ge x_{n-1}$; ASÍ (x_n) ES CRECIENTE.

AHORA SI (x_n) ES CRECIENTE Y ACOTADA $\exists\, \ell = \lim_{n\to\infty} x_n$.

POR LAS PROPIEDADES DE LÍMITES (EXISTE) $\quad x_n = x_{n-1} + \frac{2-(x_{n-1})^2}{7}$, y cuando $n\to\infty$: $\ell = \ell + \frac{2-\ell^2}{7}$

4.- Y ASÍ $0 = \frac{2-\ell^2}{7} \Rightarrow \ell = \sqrt{2}$



- Encuentra una biyección entre el intervalo $(0,2)$ y toda la recta real $\mathbb{R}$.

$$f: (0,2) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1 & \text{si } x \in (0,1] \\ 1 - \frac{1}{2-x} & \text{si } x \in [1,2) \end{cases}$$

f ES INYECTIVA:

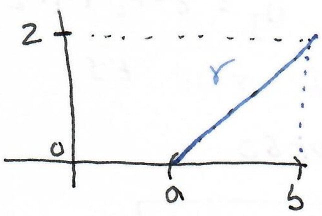
- SI $\frac{1}{x_1} - 1 = \frac{1}{x_2} - 1 \iff x_1 = x_2$
- SI $1 - \frac{1}{2-x_1} = 1 - \frac{1}{2-x_2} \iff 2 - x_1 = 2 - x_2 \iff x_1 = x_2$
- $\frac{1}{x_1} - 1 \ge 0$ Y $1 - \frac{1}{2-x_2} \le 0$ SI $x_1 \in (0,1]$ Y $x_2 \in [1,2)$

LUEGO SOLO COINCIDEN EN $x = 1$.

f ES SOBREYECTIVA:

SEA $y \ge 0$ $\quad y = \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y+1} \in (0,1]$

SEA $y < 0$ $\quad y = 1 - \frac{1}{2-x} \Rightarrow 2 - x = \frac{1}{1-y} \Rightarrow x = 2 - \frac{1}{1-y} \in (1,2)$



- Encuentra una biyección entre un intervalo cualquiera (a,b) y la recta real $\mathbb{R}$.

CONSIDERAMOS LA RECTA $r: (a,b) \longrightarrow (0,2)$

QUE PASA POR $(a,0)$ Y $(b,2)$, ES DECIR

$r(x) = \frac{2}{b-a}(x-a)$; ES UNA BIYECCIÓN

LUEGO $f \circ r: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(r(x))$ ES UNA BIYECCIÓN

(LO ES LA COMPOSICIÓN DE BIYECCIONES) DE (a,b) EN $\mathbb{R}$