AVR PRÁCTICA-Preliminar-2

Nombre y apellidos...

1.- Prueba que la función $\begin{array}{rcccl} f & : & (0,1) & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & f(x) = \frac{1}{x} - 1 \end{array}$ es una **función decreciente**, es decir si $x, y \in (0,1)$ y $x < y$ entonces $f(y) \leq f(x)$. ¡Aún no sabemos derivar!

SI $0 < x < y < 1 \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{y} - 1 < \frac{1}{x} - 1$

LUEGO $f(y) < f(x)$.

2.- Prueba que si X es un conjunto finito, entonces todo subconjunto suyo $Y \subset X$ también es finito.
(**Indicación:** hay que usar las definiciones de conjunto finito e infinito).

UN CONJUNTO PUEDE SER FINITO O INFINITO, SON CUALIDADES EXCLUYENTES (X ES FINITO SI NO ES INFINITO). SUPONGAMOS QUE EXISTE $Y \subseteq X$ INFINITO. ENTONCES EXISTE $Z \subsetneq Y$ Y $\varphi: Z \to Y$ BIYECCIÓN.

SEA $Z \cup (X \setminus Y) \subsetneq X$ YA QUE $Z \subsetneq Y$ Y SEA

(OBSERVEMOS QUE $Z \cap (X \setminus Y) = \emptyset$

$$f: Z \cup (X \setminus Y) \longrightarrow X$$
$$r \longrightarrow f(r) = \begin{cases} \varphi(r) & \text{SI } r \in Z \\ r & \text{SI } r \in X \setminus Y \end{cases}$$

SI VEMOS QUE f ES UNA BIYECCIÓN, HABREMOS PROBADO QUE X ES INFINITO ¡LO CUAL ES UNA CONTRADICCIÓN! Y NUESTRA SUPOSICIÓN DE QUE Y ES INFINITO ES FALSA Y POR TANTO Y SOLO PUEDE SER FINITO.

$f: Z \to X$ ES INYECTIVA Y COMO $Z \cap X - Y = \emptyset$

$f: X - Y \to X - Y$ ES UNA BIYECCIÓN

SE SIGUE QUE f ES INYECTIVA.

AHORA $\forall x \in X$ SI $x \in Y \Rightarrow f(\varphi^{-1}(x)) = x$.

SI $x \in X - Y \Rightarrow f(x) = x$

LUEGO f ES SOBREYECTIVA.

3. Sea X un conjunto infinito. Sea $T : X \to Y$ una biyección entre conjuntos. Prueba que Y es infinito.

SEA $Z \subsetneq X$ Y $f: Z \to X$ UNA BIYECCIÓN,

QUE SABEMOS QUE EXISTEN POR SER X INFINITO

SEA $T(Z) \subsetneq Y$ (SI $x \in X \setminus Z$, $T(x) \notin T(Z)$, YA QUE T ES BIYECCIÓN)

SEA $f = T \circ f \circ T^{-1} : T(Z) \to Y$

$$\begin{tikzcd} T(Z) \arrow[r, "T^{-1}"] & Z \arrow[d, "f"] \\ Y & X \arrow[l, "T"] \end{tikzcd}$$

LA COMPOSICIÓN DE BIYECCIONES ES UNA BIYECCIÓN Y $T(Z) \subsetneq Y$, LUEGO Y ES INFINITO POR DEFINICIÓN

4.- Sea $r \in (0,1)$. Encuentra una sucesión $(a_n)_n$ de ceros y unos de modo que

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

(**Indicación:** ¡Divide y vencerás! Ve dividiendo el"intervalo" en partes iguales).

(1)

$0 \quad r \quad 1/2 \quad 1$

SEA $a_1 = 0$ SI $r \leq 1/2$

SEA $a_1 = 1$ SI $r > 1/2$

ENTONCES, EN CUALQUIER CASO $\frac{a_1}{2} \leq r \leq \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}$

(2)

$0 \quad r \quad \frac{1}{2^2} \quad 1/2$

SI $a_1 = 0$

SEA $a_2 = 0$ SI $r \leq \frac{1}{2^2}$

SEA $a_2 = 1$ SI $\frac{1}{4} < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

$1/2 \quad r \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad 1$

SI $a_1 = 1$

SEA $a_2 = 0$ SI $r \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

SEA $a_2 = 1$ SI $r > \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

EN CUALQUIER CASO

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} \leq r \leq \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{1}{2^2}.$$

(3) SUPONGAMOS QUE EXISTEN $a_1 \dots a_n \in \{0,1\}$ TAL QUE

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{2^j} \leq r \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^n}$$

$\xleftarrow{\quad 1/2^n \quad}$

$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{2^j} \quad r \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^{n+1}} \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^n}$

SEA $a_{n+1} = 0$ SI $r \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^{n+1}}$.

SEA $a_{n+1} = 1$ SI $r > \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^{n+1}}$

EN CUALQUIER CASO

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_j}{2^j} \leq r \leq \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$\left(\text{SI } a_{n+1} = 1 \quad r \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

POR INDUCCIÓN CONSTRUIMOS

$\sum \frac{a_n}{2^n} \leq \sum \frac{1}{2^n} = 1$.

SERIE CONVERGENTE.

$n \to \infty$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j} = S \leq r \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j} = S + 0$$

$$\boxed{\text{LUEGO } r = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j}}$$