

AVR PRÁCTICA-Preliminar-2

Nombre y apellidos.....

1.- Prueba que la función $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x} - 1$ es una **función decreciente**, es decir si $x, y \in (0, 1)$ y $x < y$ entonces $f(y) \leq f(x)$. ¡Aún no sabemos derivar!

$$\text{Si } 0 < x < y < 1 \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{y} - 1 < \frac{1}{x} - 1$$

$$\text{Luego } f(y) < f(x).$$

2.- Prueba que si X es un conjunto finito, entonces todo subconjunto suyo $Y \subset X$ también es finito.

(Indicación: hay que usar las definiciones de conjunto finito e infinito).

UN CONJUNTO PUEDE SER FINITO O INFINITO, SON CUALQUIER EXCLUYENTES (X ES FINITO SI NO HAY SUBCONJUNTO). SUBCONJUNTO QUE EXISTE $Y \subseteq X$ INFINITO. EN DONDES EXISTE $Z \not\subseteq Y$ Y $\varphi : Z \rightarrow Y$ BIYECCION.



SEA $Z \cup (X - Y) \not\subseteq X$ Y SEA
 (OBSERVEMOS QUE $Z \cap (X - Y) = \emptyset$ YA QUE $Z \not\subseteq Y$)
 $\varphi : Z \cup (X - Y) \rightarrow X$
 $r \rightarrow \varphi(r) = \begin{cases} \varphi(r) & \text{si } r \in Z \\ r & \text{si } r \in X - Y \end{cases}$

SI VEMOS QUE φ ES UNA BIYECCION, MAESTRAN QUELOSA
 QUE X ES INFINITO LO CUAL ES UNA CONTRADICCION!
 NUESTRA SUBYECCION DE QUE Y ES INFINITO ES FALSA Y
 SON TANDO Y SULO QUE PUEDE SER FINITO

$\varphi : Z \rightarrow X$ ES INYECTIVA

$\varphi : X - Y \rightarrow X - Y$ ES UNA BIYECCION

SI SEGUI QUE φ ES INYECTIVA.

ADICION $\forall x \in X$ SI $x \in Y \Rightarrow \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$

LUEGO φ ES SUPRAYECTIVA.

3. Sea X un conjunto infinito. Sea $T : X \rightarrow Y$ una biyección entre conjuntos. Prueba que Y es infinito.

Sea $Z \subsetneq X$ y $\varphi : Z \rightarrow X$ una biyección,

que sabemos que existen con X infinito

Sea $\varphi(Z) \subsetneq Y$ (si $x \in X - Z$, $\varphi(x) \notin \varphi(Z)$, ya que φ es biyección)

Sea $f = \varphi \circ \varphi^{-1} : \varphi(Z) \rightarrow X$

La composición de biyecciones es una

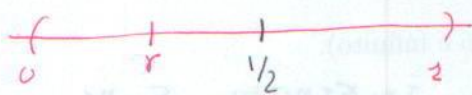
biyección y $\varphi(Z) \subsetneq Y$, luego X es infinito

4.- Sea $r \in (0, 1)$. Encuentra una sucesión $(a_n)_n$ de ceros y unos de modo que

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

(Indicación: ¡Divide y vencerás! Ve dividiendo el "intervalo" en partes iguales).

1

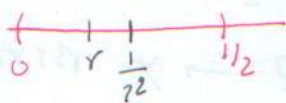


Sea $a_1 = 0$ si $r \leq 1/2$

Sea $a_1 = 1$ si $r > 1/2$

Entonces, en cualquier caso, $\frac{a_1}{2} \leq r \leq \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}$

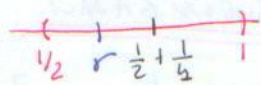
2



si $a_1 = 0$

Sea $a_2 = 0$ si $r \leq 1/4$

Sea $a_2 = 1$ si $1/4 < r \leq 1/2$



si $a_1 = 1$

Sea $a_2 = 0$ si $r \leq 1/2 + 1/4$

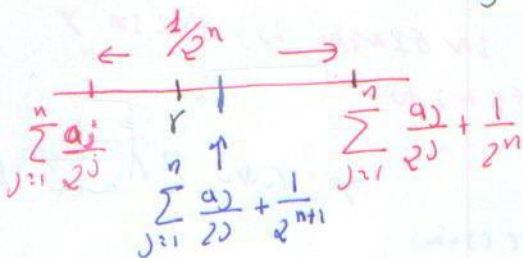
Sea $a_2 = 1$ si $r > 1/2 + 1/4$

En cualquier caso

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} \leq r \leq \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{1}{2^2}$$

Se concluye que existen $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$ tal que

$$\sum_{j=1}^n \frac{a_j}{2^j} \leq r \leq \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^n}$$



Sea $a_{n+1} = 0$ si $r \leq \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^{n+1}}$

Sea $a_{n+1} = 1$ si $r > \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^{n+1}}$

En cualquier caso

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_j}{2^j} \leq r \leq \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Por inducción constante

$$\sum \frac{a_n}{2^n} \leq \sum \frac{1}{2^n} = 1$$

tal y como queramos.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j} = s \leq r \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j} = s + 0$$

$$\text{Luego } r = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j}$$