CONVOCATORIA ORDINARIA (con soluciones)

Apellidos: ....

Nombre: ....

Ejercicio 1. (2.5 puntos). Responda a las siguientes cuestiones:

(a). (0.75 ptos.) A partir (únicamente) de la propiedad del supremo de los números reales, demostrar que para cualesquiera $x < 0, y < 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx < y$.

(b). (0.5 ptos.) Dé una definición de los siguientes conceptos: interior de un conjunto y punto frontera.

(c). (0.75 ptos.) Sea el conjunto $A = \left\{1 + \dfrac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Demostrar razonadamente cuál es su infímo, si es que existe.

(d). (0.5 ptos.) Utilizando la fórmula de De Moivre y sabiendo que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, calcule

$$\left(\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)^{100}.$$

Solución.

(a). Sean $x, y < 0$. Entonces existe el inverso x^{-1} y se tiene $x^{-1} < 0$. Se sigue que entonces $yx^{-1} = y/x > 0$.

Ahora redordemos la propiedad del supremo. Si un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es no vacío y está acotado superiormente entonces existe el supremo $\alpha = \sup(A) \in \mathbb{R}$. Probemos ahora la propiedad Arquimediana, esto es, que dado cualquier número real $z > 0$ debe existir un natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $z < n$. Lo probamos por reducción al absurdo. En caso contrario z sería una cota superior de $\mathbb{N}$, luego $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ sería no vacío y acotado superiormente, luego por la propiedad del supremo tendría un supremo $\alpha = \sup(\mathbb{N})$. Por definición de supremo, dado $1 > 0$ debe existir $m \in \mathbb{N}$ con $\alpha - 1 < m$. Pero entonces $m + 1 \in \mathbb{N}$ y $\alpha < m + 1$, lo que contradice que α sea cota superior (debe serlo pues es supremo). Esta es la contradicción, y la propiedad Arquimediana queda probada.

Podemos ya concluir el ejercicio porque como $y/x > 0$, por la propiedad Arquimediana debe existir $n \in \mathbb{N}$ con $y/x < n$. Ahora multiplicando a ambos lados por $x < 0$ llegamos a que

$$y > nx.$$

(b). Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, definimos el interior de A, y lo denotamos por $\mathring{A}$ como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que existe $r > 0$ con $B(x, r) \subset A$.

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, decimos que un punto $x \in \mathbb{R}$ es punto frontera de A si para todo $r > 0$ se tiene que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x, r) \setminus A \neq \emptyset$.

(c). Probaremos que $0 = \inf(A)$.

- 0 es cota inferior de A: Esto es claro porque para todo $n \in \mathbb{N}$

$$1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \geq 1 - \frac{1}{n^2} \geq 1 - 1 = 0.$$

- 0 es la mayor de las cotas inferiores. Esto es, veremos que si $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 + \dfrac{(-1)^n}{n^2} < \varepsilon$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Entonces tomemos $n = 1$. Se tiene que

$$1 + \frac{(-1)^1}{1^2} = 0 < \varepsilon.$$

Y con esto hemos acabado.

Realmente se tiene que A posee mínimo pues $0 \in A$. Así $\inf(A) = \min(A) = 0$.

(d). Para aplicar la fórmula de De Moivre, necesimos relacionar el interior del paréntesis con el seno y el coseno de $\frac{2\pi}{5}$. Sabemos que

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^4}{16} = \frac{16-5-1+2\sqrt{5}}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$$

y, teniendo en cuenta que $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, se tiene que $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ y, por tanto, $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. Por tanto, aplicando la fórmula de De Moivre, se tiene

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{5}-1+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^{100} &= 4^{100}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^{100} = 4^{100}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^{100} \\ &= 4^{100}\left(\cos\left(\frac{200\pi}{5}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{200\pi}{5}\right)\right) = 4^{100}\left(\cos(40\pi) + i\operatorname{sen}(40\pi)\right) \\ &= 4^{100}.\end{aligned}$$

Ejercicio 2. (1.5 puntos). Determine de manera razonada, en caso de que existan, los siguientes límites:

(a). (0.75 ptos.) $\lim\limits_{n\to+\infty} n \cdot \left(\frac{6^n+7^n}{9^n}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{\frac{(n!)^2e^n}{n^n}}\right)$.

(b). (0.75 ptos.) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, donde $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n\left(\frac{n+7}{2n}\right)\end{cases}$

Solución.

(a). Para resolver este apartado, demostremos

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{6^n+7^n}{9^n}\right) = 0,$$

para, posteriormente, utilizar el criterio del sandwich. Aplicando el criterio del cociente se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\dfrac{6^{n+1}+7^{n+1}}{9^{n+1}}}{n\dfrac{6^n+7^n}{9^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\frac{9^n}{9^{n+1}}\frac{6^{n+1}+7^{n+1}}{6^n+7^n} = \frac{1}{9}\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}}{7^n}\frac{1+\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}}{1+\left(\frac{6}{7}\right)^n} = \frac{7}{9} < 1,$$

así pues, queda demostrado que

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{6^n+7^n}{9^n}\right) = 0.$$

Teniendo en cuenta que $-1 \leq \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{\frac{(n!)^2e^n}{n^n}}\right) \leq 1$, se tiene que

$$-n \cdot \left(\frac{6^n+7^n}{9^n}\right) \leq n \cdot \left(\frac{6^n+7^n}{9^n}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{\frac{(n!)^2e^n}{n^n}}\right) \leq n \cdot \left(\frac{6^n+7^n}{9^n}\right)$$

de donde, aplicando el criterio del sandwich se concluye

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{6^n+7^n}{9^n}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{\frac{(n!)^2e^n}{n^n}}\right) = 0.$$

(b). Mediante inducción, se comprueba de manera sencilla que $x_n > 0$ para todo $n \geq 1$, ya que $x_1 > 0$ y, con la hipótesis de inducción de que $x_k > 0$, se tiene que $x_{k+1} = x_k\left(\frac{n+7}{2n}\right) > 0$. Ahora, aplicando el criterio del cociente, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+7}{2n} = \frac{1}{2} < 1,$$

y, por tanto se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Ejercicio 3. (2 puntos). El polinomio $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 1$ posee una única raíz en el intervalo $(0, 1)$, es decir, existe un único $L \in (0, 1)$ con $P(L) = 0$.

(a). (1.5 ptos.) Demuéstrese que la sucesión

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}, \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{5}\left(x_n^3 + x_n^2 + 1\right), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

es contractiva y deduce que su límite es L.

(b). (0.5 ptos.) Determine un natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| \leq 10^{-3}$ para todo $n \geq n_0$.

Solución.

(a). Veamos que la suceesión es contractiva. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - x_{n+1}| &= \left|\frac{1}{5}(x_{n+1}^3 + x_{n+1}^2 + 1) - \frac{1}{5}(x_n^3 + x_n^2 + 1)\right| = \frac{1}{5}\left|(x_{n+1}^3 - x_n^3) + (x_{n+1}^2 - x_n^2)\right| \\ &\leq \frac{1}{5}\left|(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2) + (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n)\right| \\ &\leq \frac{1}{5}\left|x_{n+1} - x_n\right|\left|x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2 + x_{n+1} + x_n\right|. \end{aligned}$$

Ahora probemos que $0 < x_n \leq \dfrac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ [1]. Lo haremos por inducción.

- Caso $n = 1$. $0 < x_1 = 1/2$. OK.
- Suponemos que $0 < x_n \leq 1/2$. Entonces por un lado $x_{n+1} > 0$ claramente y por otro,

$$x_{n+1} = \frac{1}{5}\left(x_n^3 + x_n^2 + 1\right) \leq \frac{1}{5}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{11}{8} = \frac{11}{40} \leq \frac{1}{2}.$$

Volviendo a los cálculos anteriores tenemos que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{5}|x_{n+1} - x_n|\left|\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right| = |x_{n+1} - x_n|\frac{7}{20} < \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|,$$

luego la sucesión es contractiva con constante $7/20$ (la constante se puede mejorar, pero $1/3$ es un valor sencillo de manejar y por eso se ha escogido trabajar con él en lo que sigue).

Concluiomos que la sucesión es de Cauchy y por tanto convergente. El límite $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ debe satisfacer que

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} < \frac{1}{5}\left(x_n^3 + x_n^2 + 1\right) \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{5}(L^3 + L^2 + 1) \quad \Rightarrow \quad L^3 + L^2 - 5L + 1 = 0.$$

Luego el límite L debe ser raíz del polinomio $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 1$ y además sabemos que $0 < x_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ luego necesariamente $L \in [0, 1]$. Como ni 0 ni 1 son raíces tenemos que $L \in (0, 1)$.

(b). Por la teoría vista en clase sobre sucesiones contractivas, y para simplificar los cálculos usando que nuestra sucesión es $(1/2)$-contractiva, sabemos que tenemos la estimación

$$|x_n - L| \leq \frac{(1/2)^{n-1}}{1 - (1/2)}|x_2 - x_1| = \frac{(1/2)^{n-1}}{1/2}\left|\frac{1}{2} - \frac{11}{40}\right| = \frac{9}{20}(1/2)^{n-1}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Buscamos ahora $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{9}{20}(1/2)^{n-1} \leq 10^{-3}$ para todo $n \geq n_0$. Es decir queremos que

$$(1/2)^{n_0 - 1} \leq \frac{1}{450}.$$

Por ejemplo si tomamos $n_0 = 10$ tenemos que

$$(1/2)^9 = \frac{1}{512} \leq \frac{1}{450}.$$

Concluimos por tanto que para $n \geq 10 = n_0$,

$$|x_n - L| \leq 10^{-3}.$$

Observación final: Es posible que refinando nuestros cálculos, cogiendo una constante de contractividad más pequeña (que la hay), lleguemos a un n_0 más pequeño que 10.

[1] Cuidado. Probar que $0 < x_n < 1$ no permite obtener la contractividad.

Ejercicio 4. (1 punto). Indique de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a). Solo existe un valor $x \in \mathbb{R}$ de forma que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^n} n!$ converge.

(b). Las siguientes dos sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ poseen alguna subsucesión convergente:

$$x_n = \frac{1}{n^3+1} + \frac{4}{n^3+2} + \frac{9}{n^3+3} \ldots + \frac{n^2}{n^3+n} \qquad \text{y} \qquad y_n = (n^2+1)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi n}{2024}\right).$$

Solución.

(a). Falso. Si aplicamos el criterio del cociente con la serie de los valores absolutos tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{|x|^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} |x| \left(\frac{n}{(n+1)}\right)^n = \frac{|x|}{e}.$$

Concluimos por el criterio del cociente que si $|x| < e$ la serie dada converge absolutamente y por tanto converge. Es decir hay infinitos valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que la serie converge.

(b). Verdadero. Para la primera sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ tenemos que

$$0 \leq x_n \leq n\frac{n^2}{n^3+1} = \frac{n^3}{n^3+1} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es decir, la sucesión es acotada, por lo que aplicando el Teorema de Bolzano-Weirestrass existirá alguna subsucesión convergente.

Para la segunda sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ daremos explícitamente una subsucesión convergente. Por ejemplo para la sucesión estrictamente creciente de naturales

$$(n_k)_{k\geq 1} = (2024 \cdot k)_{k\geq 1},$$

se sigue que la subsucesión

$$(y_{n_k})_{k\geq 1} = \big((2024\cdot k)^2 + 1)\,\mathrm{sen}(\pi k)\big)_{k\geq 1} = (0)_{k\geq 1}$$

es claramente convergente a cero.

Ejercicio 5. (1.5 puntos). Determine si las siguientes series son convergentes o no, calculando su valor en caso de que sea posible. ¿Cuáles de ellas permiten alguna reordenación convergente al número $-\log(3)$?

(a). (0.5 ptos.) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \log\left(1 - \frac{2}{n^2+n}\right)$.

(b). (0.5 ptos.) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^3+1}$.

(c). (0.5 ptos.) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\log(n)\log\big(\log(n)\big)}$.

Solución.

(a). Reescribamos el término general de la serie:

$$\begin{aligned}\log\left(1 - \frac{2}{n^2+n}\right) &= \log\left(\frac{n^2+n-2}{n(n+1)}\right) = \log\left(\frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}\right)\\ &= \log(n+2) - \log(n+1) - \log(n) + \log(n-1).\end{aligned}$$

Por consiguiente, la serie es telescópica pues, dado $N \geq 2$ se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} \log\left(1 - \frac{2}{n^2+n}\right) &= \sum_{n=2}^{N} \big(\log(n+2) - \log(n+1) - \log(n) + \log(n-1)\big)\\ &= \log(N+2) - \log(3) - \log(N) + \log(1)\\ &= \log\left(\frac{N+2}{N}\right) - \log(3).\end{aligned}$$

Así pues, tomando el límite cuando $N \to +\infty$ se concluye que

$$\sum_{n\geq 2} \log\left(1 - \frac{2}{n^2+n}\right) = -\log(3)$$

y, por tanto, la serie es convergente y la reordenación trivial da el valor $-\log(3)$ (de hecho, puesto que todos los términos de la serie son negativos, la serie es absolutamente convergente y todas sus reordenaciones dan el valor $-\log(3)$).

(b). En este caso, es sencillo ver que la serie es absolutamente convergente, pues

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{n(-1)^n}{n^3+1}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Por tanto, la serie es convergente y, por ser absolutamente convergente, todas sus reordenaciones convergen al mismo valor. Comprobemos que el valor de la serie es distinto de $-\log(3)$. Para ello, nótese que $-\log(3) < -1$ mientras que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^3+1} = -\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^3+1}$$

y que, por consiguiente, bastará con demostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^3+1} \geq 0.$$

Para ello, demostremos en primer lugar que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ dada por $x_n = \frac{n}{n^3+1}$ es estrictamente decreciente. Dados $1 \leq n < m$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{n}{n^3+1} > \frac{m}{m^3+1} &\iff m^3 n + n > m n^3 + m \iff mn(m^2 - n^2) + n - m > 0 \\
&\iff mn(m-n)(m+n) + n - m > 0 \iff (m-n)\big(mn(m+n) - 1\big) > 0 \\
&\iff mn(m+n) > 1
\end{aligned}$$

y la última desigualdad es trivial pues $mn \geq 2$ y $m+n \geq 3$. Así pues, dado $N \geq 2$, hay dos opciones: si N es impar

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{n(-1)^n}{n^3+1} = \sum_{n=1}^{(N-1)/2} \left(\frac{2n}{(2n)^3+1} - \frac{2n+1}{(2n+1)^3+1}\right) > 0,$$

mientras que si N es par

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{n(-1)^n}{n^3+1} = \sum_{n=1}^{(N-2)/2} \left(\frac{2n}{(2n)^3+1} - \frac{2n+1}{(2n+1)^3+1}\right) + \frac{N}{N^3+1} > 0,$$

de donde se concluye que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^3+1} \geq 0.$$

y, por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^3+1} \neq -\log(3).$$

(c). En este caso, veamos que la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\log(n)\log\big(\log(n)\big)}$$

es condicionalmente convergente. Para ello, aplicaremos el criterio de Leibniz a la sucesión

$$x_n = \frac{1}{\log(n)\log\big(\log(n)\big)}, \quad n \geq 3$$

En primer lugar, la serie es alternada pues $\log(n)\log\big(\log(n)\big) > 0$ para todo $n \geq 3$ y $\cos(\pi n) = (-1)^n$. Además, la sucesión $(x_n)_{n\geq 3}$ es decreciente y con límite 0. Es decreciente ya que al ser el logaritmo una función estrictamente creciente se tiene para todo $n < m$

$$0 < \log(n)\log\big(\log(n)\big) < \log(m)\log\big(\log(m)\big) \implies x_n = \frac{1}{\log(n)\log\big(\log(n)\big)} > \frac{1}{\log(m)\log\big(\log(m)\big)} = x_m$$

y, además como $\lim_{n\to\infty} \log(n) = +\infty$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n)\log\big(\log(n)\big)} = 0.$$

En conclusión, utilizando el criterio de Leibniz se concluye que la serie es convergente.

Con el fin de aplicar el teorema de reordenación de Riemann, demostremos que la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\log(n)\log\big(\log(n)\big)}$$

no converge absolutamente. Teniendo en cuenta que $\log(n) \leq n$ para todo $n \geq 3$ se tiene

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\log(n)\log\big(\log(n)\big)} \geq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$$

y, utilizando el criterio de condensación de Cauchy, es inmediato comprobar que la última serie es divergente, pues se obtiene la serie armónica:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \log(2^n)} = \frac{1}{\log(2)} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Así pues, del teorema de reordenación de Riemann, se concluye que existe una reordenación $\sigma : \{n \geq 3 : n \in \mathbb{N}\} \to \{n \geq 3 : n \in \mathbb{N}\}$ de modo que

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(\pi\sigma(n))}{\log(\sigma(n))\log\big(\log(\sigma(n))\big)} = -\log(3).$$

Ejercicio 6. (1.5 puntos). Responda a las siguientes cuestiones sobre límites de funciones.

(a). (0.75 ptos.) Determine, utilizando la definición de límite,

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x+1}{x^2-9}.$$

(b). (0.75 ptos.) Calcule el siguiente límite, en caso de que exista,

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[4]{x^3+\cos(x)+1} - \sqrt[4]{x^3+1}\right) \operatorname{sen}\left(x^2\right).$$

Solución.

(a). Probaremos que $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{x+1}{x^2-9} = +\infty$. Sea $M > 0$ y tomemos $\delta = \min\left\{1, \dfrac{4}{7M}\right\}$. De este modo, si $3 < x < 3+\delta$ tenemos que

$$\frac{x+1}{x^2-9} > \frac{4}{x^2-9} = \frac{4}{(x+3)(x-3)} > \frac{4}{7}\frac{1}{x-3} > \frac{4}{7\cdot\delta} \geq M$$

En los cálculos anteriores se ha usado que $x+1 > 0$ y que $x^2-9 > 0$ (pues $x > 3$). Además $x+3 < 6+\delta \leq 7$, luego $1/(x+3) > 1/7$. Por último $0 < x-3 < \delta$, luego $1/(x-3) > 1/\delta$.

(b). Primero realizamos los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[4]{x^3+\cos(x)+1} - \sqrt[4]{x^3+1}\right) &= \frac{\left(\sqrt{x^3+\cos(x)+1} - \sqrt{x^3+1}\right)}{\left(\sqrt[4]{x^3+\cos(x)+1} + \sqrt[4]{x^3+1}\right)} \\ &= \frac{\cos(x)}{\left(\sqrt{x^3+\cos(x)+1} + \sqrt{x^3+1}\right)\left(\sqrt[4]{x^3+\cos(x)+1} + \sqrt[4]{x^3+1}\right)}.\end{aligned}$$

Observamos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x^3+\cos(x)+1} + \sqrt{x^3+1}\right)\left(\sqrt[4]{x^3+\cos(x)+1} + \sqrt[4]{x^3+1}\right)} = 0.$$

(Se podría justifcar de manera rigurosa por qué esto es así pero no hace falta). Además

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos(x)}{\left(\sqrt{x^3+\cos(x)+1}+\sqrt{x^3+1}\right)\left(\sqrt[4]{x^3+\cos(x)+1}+\sqrt[4]{x^3+1}\right)} \\
\leq &\frac{1}{\left(\sqrt{x^3+\cos(x)+1}+\sqrt{x^3+1}\right)\left(\sqrt[4]{x^3+\cos(x)+1}+\sqrt[4]{x^3+1}\right)}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos(x)}{\left(\sqrt{x^3+\cos(x)+1}+\sqrt{x^3+1}\right)\left(\sqrt[4]{x^3+\cos(x)+1}+\sqrt[4]{x^3+1}\right)} \\
\geq &\frac{-1}{\left(\sqrt{x^3+\cos(x)+1}+\sqrt{x^3+1}\right)\left(\sqrt[4]{x^3+\cos(x)+1}+\sqrt[4]{x^3+1}\right)},
\end{aligned}
$$

por lo que usando el criterio de comparación se llega a que

$$
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[4]{x^3+\cos(x)+1}-\sqrt[4]{x^3+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{cos(x)}{\left(\sqrt{x^3+\cos(x)+1}+\sqrt{x^3+1}\right)\left(\sqrt[4]{x^3+\cos(x)+1}+\sqrt[4]{x^3+1}\right)}=0.
$$

Por último, como

$$
-\left(\sqrt[4]{x^3+\cos(x)+1}-\sqrt[4]{x^3+1}\right)\leq\left(\sqrt[4]{x^3+\cos(x)+1}-\sqrt[4]{x^3+1}\right)\operatorname{sen}\left(x^2\right)\leq\left(\sqrt[4]{x^3+\cos(x)+1}-\sqrt[4]{x^3+1}\right)
$$

aplicando de nuevo el criterio de comparación concluimos que el límite pedido es

$$
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[4]{x^3+\cos(x)+1}-\sqrt[4]{x^3+1}\right)\operatorname{sen}\left(x^2\right)=0.
$$