ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CÁLCULO DE PRIMITIVAS. FUNCIONES RACIONALES.

Cuando tenemos el problema de calcular la primitiva de una función racional

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}dx,$$

es decir la primitiva de un cociente de polinomios, a veces es conveniente simplificar su expresión. Para ello disponemos del método de **Descomposición en Fracciones Simples**. Este método ya lo empleamos al sumar series telescópicas (ver el Tema de Series). Ver el Apéndice siguiente para una mejor comprensión del mismo.

Vamos a empezar calculando primitivas de funciones racionales muy sencillas, aquellas que aparecerán en el método de **Descomposición.**

Primitivas de la forma $\int \frac{c}{(x-a)^n}dx.$

Tenemos dos casos:

- si $n = 1$, entonces

$$\int \frac{c}{x-a}dx = c\ln(x-a);$$

- si $n > 1$, entonces

$$\int \frac{c}{(x-a)^n}dx = \int c(x-a)^{-n}dx = c\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} = \frac{-c}{(n-1)(x-a)^{n-1}}.$$

Primitivas de la forma $\int \frac{rx+k}{(x^2+ax+b)^n}\,dx.$

Suponemos además que el polinomio de segundo grado que aparece en el denominador no tiene raíces reales. Si las tiene el problema se reduciría al caso anterior por descomposición en fracciones simples.

Observación: Dada una primitiva como

$$\int \frac{rx+k}{(x^2+ax+b)^n}dx$$

operando

$$= \frac{r}{2}\int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^n} + \frac{\frac{2k}{r}-a}{(x^2+ax+b)^n}dx.$$

Luego nos aparecen dos tipos de integrales

- $\displaystyle\int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^n}\,dx$; como el númerador es la derivada de la base del denominador, con el cambio de variable $u = x^2+ax+b$ pasamos a la primitiva $\displaystyle\int \frac{1}{(u)^n}du$ que ya sabemos resolver;
- el caso difícil es $\displaystyle\int \frac{\frac{2k}{r}-a}{(x^2+ax+b)^n}dx$.

Primitivas de la forma $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^n}\,dx$.

De nuevo suponemos que el polinomio de segundo grado x^2+ax+b es irreducible, es decir que no tiene raíces reales y que es lo mismo que decir que $a^2-4b<0 \quad\Leftrightarrow\quad b-\frac{a^2}{4}>0$.

Lema. 1. *Dada la integral* $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^n}dx$, *con denonimador irreducible, existe un cambio de variable de modo que transforma la integral en* $\displaystyle\int \frac{K}{(u^2+1)^n}dx$ *donde* K *es una constante.*

Demostración: Vamos a transformar el polinomio de segundo grado (**completando cuadrados**).

$$x^2+ax+b = x^2+2\frac{a}{2}x+(\frac{a}{2})^2+b-\frac{a^2}{4}$$

$$= (x+\frac{a}{2})^2+\beta^2 \qquad \text{donde} \qquad \beta = \sqrt{b-\frac{a^2}{4}}$$

Luego

$$x^2+ax+b = \beta^2[\frac{1}{\beta^2}(x+\frac{a}{2})^2+1].$$

Si en nuestra integral hacemos el cambio $u = \frac{x+\frac{a}{2}}{\beta}$, así $du = \frac{1}{\beta}dx$ y tendremos la integral

$$\frac{1}{\beta^{2n-1}}\int \frac{1}{(u^2+1)^n}du$$

□

Hemos reducido nuestro problema a dos situaciones posibles:

- si $n=1$, entonces $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x$;
- si $n>1$, entonces a la integral $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$ se le aplica la fórmula de reducción

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}.$$

Se deja como ejercicio probar esta última fórmula. Ya probamos, usando la Regla de Integración por Partes, una fórmula de reducción para la integral $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ para n par.

Ejemplo. 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Demostración: Consideramos la ecuación $x^2+2x+5=0$, como el **discriminante** $2^2-4\times 5<0$, la ecuación no tiene soluciones y el polinomio es irreducible. Así para calcular nuestra integral tenemos que transformar la función en algo del tipo $\frac{1}{x^2+1}$. Completando cuadrados

$$x^2+2x+5 = x^2+2x+1+2^2 = 4(\,(\frac{x+1}{2})^2+1\,),$$

y así

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(\frac{dx}{(\frac{x+1}{2})^2+1})$$

haciendo el cambio de variable $u=\frac{x+1}{2}$ con $du=\frac{1}{2}dx$ tenemos

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\arctan u = \frac{1}{2}\arctan(\frac{x+1}{2})$$

□

Ejemplo. 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x}$.

Demostración:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x} = \int \frac{dx}{x(x+2)}$$

intentamos la descomposición

$$= \int \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x+2}dx$$

necesariamente

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{x}dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{x+2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln(x+2) = \ln\sqrt{\frac{x}{x+2}}$$

□

Primitiva de una función racional $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

Para integrar cocientes de polinomios $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, primero dividimos P entre Q de modo que

$$P(x) = q(x)Q(x) + r(x)$$

donde el resto r tiene grado menor que él de Q (ver Apéndice Descomposición en Fracciones Simples). Luego

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{q(x)Q(x)+r(x)}{Q(x)}dx = \int q(x)dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}dx.$$

La integral $\int q(x)dx$ sabemos resolverla, así nuestro problema queda reducido al caso en que el numerador tiene grado menor que el denominador.

En el Apéndice Descomposición en Fracciones Simples se puede ver el siguiente resultado.

Teorema. 1. *Dados dos polinomios $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ con grado de P menor que el de Q y donde tenemos la descomposición*

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1}....(x-\alpha_i)^{r_i}(x^2-2a_1x+a_1^2+b_1^2)^{s_1}....(x^2-2a_jx+a_j^2+b_j^2)^{s_j},$$

entonces se pueden encontrar números reales $c_{*,*}, d_{*,*}$ y $k_{*,*}$ tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = [\frac{c_{1,1}}{(x-\alpha_1)} + \frac{c_{1,2}}{(x-\alpha_1)^2} + ... + \frac{c_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}] + ...$$
$$.... + [\frac{c_{i,1}}{(x-\alpha_i)} + \frac{c_{i,2}}{(x-\alpha_i)^2} + ... + \frac{c_{i,r_i}}{(x-\alpha_i)^{r_i}}]$$
$$+[\frac{d_{1,1}x+k_{1,1}}{x^2-2a_1x+a_1^2+b_1^2} + ... + \frac{d_{1,s_1}x+k_{1,s_1}}{(x^2-2a_1x+a_1^2+b_1^2)^{s_1}}] + ...$$
$$.... + [\frac{d_{j,1}x+k_{j,1}}{x^2-2a_jx+a_j^2+b_j^2} + ... + \frac{d_{j,s_j}x+k_{j,s_j}}{(x^2-2a_jx+a_j^2+b_j^2)^{s_j}}].$$

Luego nuestra integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, con grado de P menor que el de Q, queda reducida a sumas de integrales como las que hemos resuelto más arriba.

Ejemplo. 3. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx.$

Demostración: El denominador es el polinomio x^3+x, así dividiendo

$$\begin{array}{rl} x^3 + \ x + 1 & |\underline{x^3+x} \\ \underline{-x^3 - x} & \quad 1 \\ 1 & \end{array}$$

luego

$$\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx = \int 1 + \frac{1}{x(x^2+1)}dx = x + \int \frac{1}{x(x^2+1)}dx.$$

Para resolver la íntegral que falta, usando el Teorema de Descomposición, ponemos

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{c}{x} + \frac{dx+k}{x^2+1}$$

operando

$$= \frac{c(x^2+1) + x(dx+k)}{x(x^2+1)}.$$

Así, igualando numeradores

$$1 = (c+d)x^2 + kx + c.$$

Dos polinomios son iguales si tienen iguales los coeficientes. LLegamos al sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{array}{ccccccc} c & + & d & & & = & 0 \\ & & & & k & = & 0 \\ c & & & & & = & 1 \end{array}$$

Este sistema es muy fácil de resolver $c = 1, d = -1$ y $k = 0$, y así

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx = \int \frac{c}{x} + \frac{dx+k}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} dx$$

$$\int \frac{1}{x} dx + \int -\frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1).$$

Con todo lo anterior llegamos a que

$$\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} = x + \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$$

□

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`