ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL.

Algunas propiedades de la integral, que son importantes para operar con ella, son las siguientes.

Proposición. 1. *Sea una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,* ***integrable****.*

- *Para todo $c \in [a,b]$ existen las integrales $\int_a^c f$ y $\int_c^b f$ verificándose que*
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \qquad (*)$$
- *Si convenimos que para $\int_x^y f = -\int_y^x f$, entonce la formula $(*)$ es cierta para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ siempre que las integrales que aparecen existan.*

Demostración:

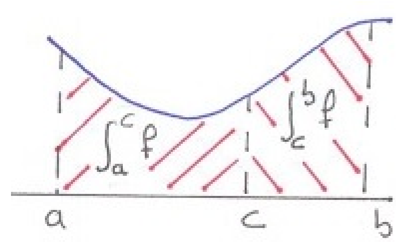

FIGURA 1. Demostración sin palabras.

La demostración formal es más engorrosa que difícil. Sea $\epsilon > 0$ y sea P una partición para la cuál $c \in P$ y además

$$S(f,P) - I(f,P) < \epsilon$$

(esta partición existe por el Criterio de Integrabilidad de Riemann). Sea $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_k = c < t_{k+1} < .. < t_n = b\}$. Así

$$S(f,P) - I(f,P) = \sum_{i=0}^{k-1}(M_i - m_i)(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=k}^{n-1}(M_i - m_i)(t_{i+1} - t_i) < \epsilon,$$

como $\sum_{i=k}^{n-1}(M_i - m_i)(t_{i+1} - t_i) > 0$ se sigue que para la partición $P' = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_k = c\} \in P([a,c])$ se tiene que

$$S(f,P') - I(f,P') < \epsilon.$$

Lo que prueba, usando el Criterio de Integrabilidad de Riemann, que existe $\int_a^c f$. De forma similar se prueba que existe $\int_c^b f$.

Para ver la fórmula $(*)$ tomamos ϵ y las dos particiones $P' \in P([a,c])$ y $P'' \in P([c,b])$ de antes. Ahora

$$|\int_a^b f - (\int_a^c f + \int_c^b f)|$$

$$\leq \text{máx}\{S(f,P) - (I(f,P') + I(f,P'')), S(f,P') + S(f,P'') - I(f,P)\}$$

$$= S(f,P) - I(f,P) < \epsilon.$$

Como lo anterior es cierto para todo $\epsilon > 0$, se sigue que $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ □

Teorema. 1. *Sean f y g dos funciones integrables sobre el intervalo $[a,b]$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces*

a: *la función suma $f+g$ es integrable y*

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g;$$

b: *la función λf es integrable y*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Demostración: La parte **a**) se prueba usando que

- $M_{f+g,i} \leq M_{f,i} + M_{g,i}$ lo que permite poner que

$$S(f+g,P) \leq S(f,P) + S(g,P) \quad \text{para toda partición} \quad P \in P([a,b]);$$

y también que

- $m_{f+g,i} \geq m_{f,i} + m_{g,i}$ (ver ejercicios del Tema de Números) lo que permite poner que

$$I(f+g,P) \geq I(f,P) + I(g,P) \quad \text{para toda partición} \quad P \in P([a,b]).$$

Luego

$$0 \leq S(f+g,P) - I(f+g,P) \leq S(f,P) + S(g,P) - (I(f,P) + I(g,P)).$$

La parte **b**) se prueba usando que

- $\sup \lambda A = \lambda \sup A$ y $\inf \lambda A = \lambda \inf A$, si $\lambda \geq 0$ (ver ejercicios del Tema de Números) lo que permite poner que

$$S(\lambda f, P) = \lambda S(f, P) \quad \text{y} \quad I(\lambda f, P) = \lambda I(f, P) \quad \forall P \in P([a, b]);$$

y también que
- $\sup \lambda A = \lambda \inf A$, y $\inf \lambda A = \lambda \sup A$, si $\lambda < 0$ (ver ejercicios del Tema de Números) lo que permite poner que

$$S(\lambda f, P) = \lambda I(f, P) \quad \text{y} \quad I(\lambda f, P) = \lambda S(f, P) \quad \forall P \in P([a, b]).$$

□

Proposición. 2. *Sean f y g dos funciones integrables sobre el intervalo $[a, b]$.*

a: *Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

b: *En particular, si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

c: *La función $|f|$ es integrable y además*

$$|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|.$$

Demostración:

La parte **a**) se prueba usando que si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$m_{f,i} \leq m_{g,i} \quad \text{y} \quad M_{f,i} \leq M_{g,i}$$

donde $m_{*,i}$ y $M_{*,i}$ son los correspondientes ínfimos y máximos dados por una partición.

La parte **b**) es un caso particular del primer caso tomando las funciones f ó g constantes. Es gráfico siguiente nos terminará de convencer.

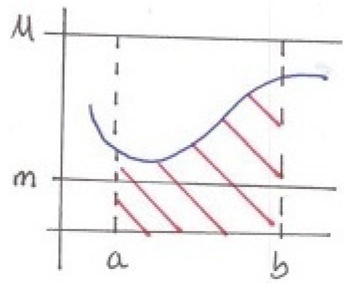

FIGURA 2. Demostración sin palabras.

Parte **c**), la siguiente figura nos ilustra.

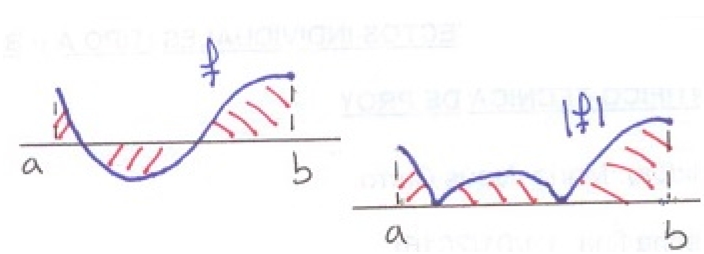

FIGURA 3. Integrales de f y $|f|$.

Si f es integrable al pasar al valor absoluto $|f|$ transformamos la gráfica de f pasando la parte por debajo del eje de las x's a la parte de arriba de forma simétrica. Luego si f es integrable, parece que $|f|$ también lo va a ser. La fórmula $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ se cumple ya que la parte de la gráfica que queda por debajo de eje resta mientras que en el caso de $|f|$ esa misma parte suma.

La prueba rigurosa, echa mano de particiones tomadas adecuadamente y es engorrosa. Para hacerla se definen

$$f^+ = \begin{cases} f(x), & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

y

$$f^- = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Es fácil ver que $f = f^+ - f^-$ y que $|f| = f^+ + f^-$. Usando particiones y el Criterio de Riemann se prueba que f^+ y f^- son integrables.

Veamos en concreto que f^+ es integrable. Dado $\epsilon > 0$, existe un partición $P = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$ para la cuál

$$\epsilon \geq S(f,P) - I(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(t_{i+1} - t_i) =$$

$$\left[\sum_{i\in\{j\,:\,M_j>0\}} M_i(t_{i+1}-t_i) - \sum_{i\in\{j\,:\,m_j>0\}} m_i(t_{i+1}-t_i)\right] +$$

$$\left[\sum_{i\in\{j\,:\,M_j\leq 0\}} M_i(t_{i+1}-t_i) - \sum_{i\in\{j\,:\,m_j\leq 0\}} m_i(t_{i+1}-t_i)\right].$$

Ahora $\{j \;:\; M_j \leq 0\} \subseteq \{j \;:\; m_j \leq 0\}$ y siempre $M_i - m_i \geq 0$. Además

$$(M_j - m_j) \geq M_j \qquad \text{siempre que} \qquad M_j > 0 \text{ y } m_j \leq 0,$$

y $\{j \;:\; m_j \geq 0\} \subseteq \{j \;:\; M_j \geq 0\}$. Así

$$S(f^+, P) - I(f^+, P) =$$

$$\left[\sum_{i\in\{j\,:\,M_j>0\}} M_i(t_{i+1}-t_i) - \sum_{i\in\{j\,:\,m_j>0\}} m_i(t_{i+1}-t_i)\right] \leq \epsilon.$$

Lo que prueba que f^+ es integrable.

Como $|f|$ es suma de funciones integrables, entonces $|f|$ también lo es. Con esta terminología es claro que

$$|\int_a^b f| = |\int_a^b f^+ - \int_a^b f^-| \leq |\int_a^b f^+| + |\int_a^b f^-| = \int_a^b f^+ + \int_a^b f^- = \int_a^b |f|$$

$\square$

Ejercicio. 1. *Tenemos que ver que* $\frac{\pi}{2} \leq \int_0^\pi \operatorname{sen} x dx \leq \pi$.

Demostración: Representamos la función $f(x) = \operatorname{sen} x$. Primero $0 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ y además $f''(x) = -\operatorname{sen} x \leq 0$ si $x \in [0, \pi]$, luego la gráfica es concava y podemos pintar

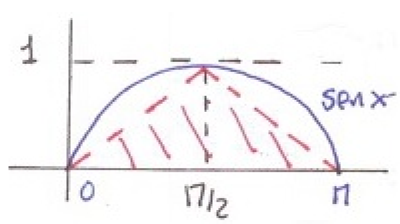

Figura 4. Función seno concava en $[0, \pi]$.

Luego con calcular las áreas del rectángulo que circunscribe a la gráfica y la del triángulo circunscrito, tenemos la desigualdasd pedida $\square$

Ejercicio. 2. *Tenemos que ver si es cierta la desigualdad* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x dx$.

Demostración: Procedemos como en el ejemplo anterior. Representamos la función $\operatorname{sen} x$. Es fácil darse cuenta que la recta $y = x$ es la recta tangente a la gráfica del seno por el punto $(0, 0)$. Luego tenemos algo del tipo

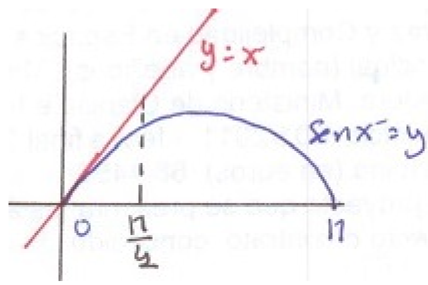

Figura 5. Posición relativa del seno y la recta $y = x$.

y no parece que pueda ser cierta la desigualdad. De forma rigurosa, consideramos la función

$$h(x) = x - \operatorname{sen} x.$$

Derivando

$$h'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Luego la función h es creciente y como $h(0) = 0$, se tiene que $h(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Por tanto

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} h(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} xdx.$$

Claramente la desigualdad que nos piden no es cierta $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es