ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

La **integral** alcanza todo su poder cuando se alía con la **derivada**. Esto ocurre en el **Teorema Fundamental del Cálculo**.

Funciones definidas a través de la integral. Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable, sabemos que para todo $x \in [a,b]$ existe la integral $\displaystyle\int_a^x f$. Esto nos da pie para definir la función:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \text{para todo} \qquad x \in [a,b].$$

(Observemos que hemos añadido una nueva notación "dt" para distingir la variable de la función f, en este caso t, de la variable x de la función F).

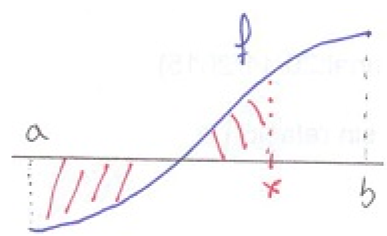

FIGURA 1. Definición de una función a través de la integral.

Observación. 1. *La función F verifica que $F(a) = 0$ y $F(b) = \int_a^b f$.*

La integral tiene un poder regularización de las funciones. Así tenemos

Teorema. 1. *Sea una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. La función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en el intervalo $[a,b]$*

Demostración: Sea $c \in [a,b]$. Por ser f integrable está acotada, así sea $M > 0$ una cota de la función (es decir $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$). Entonces

$$|F(c+h) - F(c)| = |\int_a^{c+h} f - \int_a^c f|$$

$$= |\int_a^c f + \int_c^{c+h} f - \int_a^c f| = |\int_c^{c+h} f| \leq |h|M \to_{h\to 0} 0.$$

Lo que prueba que $\lim_{h\to 0} F(c+h) = F(c)$, así F es continua en c $\square$

Ejemplo. 1. *Consideramos la función*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & si \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{6}{5}, & si \quad t \in (\frac{1}{2}, 1] \\ \frac{3}{10}, & si \quad t \in (1, 2] \end{cases}$$

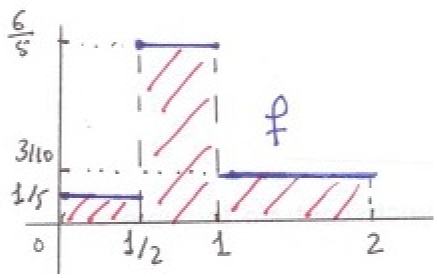

FIGURA 2. Función integrable no continua.

¿Cómo es la función F?

Demostración: Si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{5}dt = \frac{1}{5}x,$$

donde la integral la hemos calculado hayando el área de un rectangulo. Si $x \in (\frac{1}{2}, 1]$, entonces

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}dt + \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{6}{5}dt = \frac{6}{5}(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{10},$$

donde la integral la hemos calculado hayando el área de dos rectángulos. Si $x \in (1, 2]$, se procede como antes y se llega a que

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x, & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{6}{5}(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{10}, & \text{si} \quad t \in (\frac{1}{2}, 1] \\ \frac{3}{10}(x - 1) + \frac{7}{10}, & \text{si} \quad t \in (1, 2] \end{cases}$$

Si representamos F tenemos una función continua.

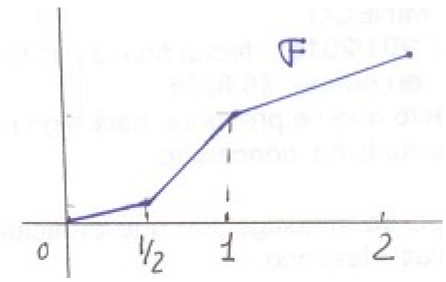

FIGURA 3. Gráfica de F.

$\square$

(**Teorema Fundamental del Cálculo**). Si a la función f le pedimos que sea continua, entonces resulta que la función F es derivable.

Teorema. 2. *(**Teorema Fundamental del Cálculo**). Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. La función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en todo $c \in [a, b]$ y además*

$$F'(c) = f(c).$$

Demostración: Si $c = a$ o $c = b$ hay que calcular derivadas laterales (ejercicio).

Sea $c \in (a, b)$. Tenemos que ver, por definición de derivada, si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}.$$

Ahora si $h > 0$, tenemos que

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t)dt.$$

Sean

$$m_h = \inf\{f(t) \ : \ t \in [c, c+h]\},$$

y

$$M_h = \sup\{f(t) \ : \ t \in [c, c+h]\},$$

Así por las propiedades de la integral

$$hm_h \leq \int_c^{c+h} f(t)dt \leq hM_h,$$

de lo que se sigue que

$$m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h.$$

Como f es continua en c, si $h \to 0$ entonces se tiene que $m_h \to f(c)$ y $M_h \to f(c)$. Por tanto

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Luego la derivada por la derecha de F en c es $F'(c^+) = f(c)$. De forma similar se ve que la derivada por la izquierda $F'(c^-) = f(c)$. Lo que prueba el resultado $\square$

Observación. 2. *Resulta que el Teorema Fundamental del Cálculo es una* ***Regla de Derivación****:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad f \quad continua \quad \Rightarrow F'(x) = f(x).$$

Pero no solo es una regla de derivación. Es mucho más. Por ejemplo un modo de calcular integrales (y por tanto áreas) como vemos a continuación. Pero es más, un modo de definir las funciones transcendente: $\ln x, e^x, \cos x$...etc como veremos en los Apéndices que siguen a este artículo. Y muchas más aplicaciones que tiene la integral, algunas de las cuáles iremos señalando en los artículos siguientes.

Corolario. 1. *(**Regla de Barrow**). Si f es una función continua sobre $[a, b]$ y existe una función g de modo que $g' = f$ en todo $[a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a).$$

Demostración: Sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Por el Teorema anterior $F' = f$. Luego F y g tienen la misma derivada, entonces existe una constante K de modo que

$$F(x) = g(x) + K$$

(lo cuál es una consecuencia del Teoream del Valor Medio que vimos en su momento). Como $F(a) = 0$, se sigue que $K = -g(a)$ y así

$$g(b) - g(a) = F(b) = \int_a^b f(t)dt$$

$\square$

Lo que nos dice este Corolario es que si encontramos una función g cuya derivada sea f, entonces la integral de f se consigue evaluando g en dos puntos. Por tanto el problema de **calcular integrales** se **reduce** al problema de calcular **primitivas** (es decir encontrar funciones cuya derivada sea una función dada). El cálculo de primitivas será nuestro siguiente objetivo.

Ejemplo. 2. *Vamos a calcular* $\int_0^1 x^5 dx$.

Demostración: Se puede intentar calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{i}{n})^5$. Este es el camino que hasta ahora conocemos. Ahora bien, es fácil ver que $g(x) = \frac{x^6}{6}$ verifica que $g'(x) = x^5$ y por tanto la regla de Barrow nos dice que

$$\int_0^1 x^5 dx = \frac{1^6}{6} - \frac{0^6}{6} = \frac{1}{6}$$

□

Vemos que en cuanto podemos encontrar una primitiva de una función entonces es muy sencillo calcular su integral. Cuando aprendamos a calcular primitivas volveremos al cálculo de integrales.

Ejercicio. 1. *Consideramos la función* $F(x) = \int_{x^2}^{\ln(x+1)} \sqrt{1+t^2}dt$. *Nos piden su derivada.*

Demostración: La función $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ tiene por dominio todo $\mathbb{R}$ y allí es continua. Luego es integrable en cualquier intervalo cerrado de la recta. Ahora, el dominio de F será $\{x > -1\}$, para que tenga sentido el logaritmo.

$$F(x) = \int_{x^2}^{\ln(x+1)} \sqrt{1+t^2}dt = \int_{x^2}^{0} \sqrt{1+t^2}dt + \int_{0}^{\ln(x+1)} \sqrt{1+t^2}dt$$

$$= -\int_{0}^{x^2} \sqrt{1+t^2}dt + \int_{0}^{\ln(x+1)} \sqrt{1+t^2}dt,$$

sin más que aplicar las reglas de la integral.

Ahora derivamos teniendo en cuenta: la regla de la suma, el Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de la Cadena.

$$F'(x) = \sqrt{1+(\ln(x+1))^2}\frac{1}{x+1} - 2x\sqrt{1+(x^2)^2}$$

□

Ejercicio. 2. *Sean* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *dos funciones continuas de modo que* $\int_a^b f = \int_a^b g$. *Hay que probar que existe* $c \in [a,b]$ *de modo que f(c)=g(c).*

Demostración: Esto recuerda a un Teorema de Valor Medio. Veamos que es así. Sean

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \text{y} \qquad G(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

Estas funciones son continuas en $[a,b]$ y derivables en todo (a,b). Sea la función $F - G$ que es continua en $[a,b]$ y derivable en todo (a,b). Además

$F - G(a) = 0$ y también, por hipótesis, $F - G(b) = 0$. Así podemos aplicar el Teorema de Rolle y existe $c \in (a, b)$ de modo que

$$0 = (F - G)'(c) = f(c) - g(c),$$

usando la regla de derivación para F y G. Despejando se tiene lo que se pide
$\square$

Debilitando un poco las hipótesis tenemos que:

Teorema. 3. *Si una función f es integrable en $[a, b]$ y $f = g'$ para alguna función g, entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

Demostración: Sea $P = \{t_0 = a, t_1, ..., t_n = b\}$ una partición cualquiera del intervalo $[a, b]$. Podemos aplicar a g el Teorema del Valor Medio y así para cada i existe

$$x_i \in (t_i, t_{i+1})$$

de modo que

$$g(t_{i+1}) - g(t_i) = g'(x_i)(t_{i+1} - t_i) = f(x_i)(t_{i+1} - t_i).$$

Si m_i y M_i son los ínfimos y supremos habituales, es evidente que

$$m_i(t_{i+1} - t_i) \leq f(x_i)(t_{i+1} - t_i) \leq M_i(t_{i+1} - t_i);$$

es decir

$$m_i(t_{i+1} - t_i) \leq g(t_{i+1}) - g(t_i) \leq M_i(t_{i+1} - t_i).$$

Así

$$I(f, P) \leq g(b) - g(a) \leq S(f, P)$$

para toda partición P. Como f es integrable, se sigue que

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

$\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es