AVR PRÁCTICA-20

Nombre y apellidos...

1.- Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y $\lambda \in \mathbb{R}$.

1_1.- Explica por que es correcta la definición de $||f||_\infty$ (norma infinita de f) dada por

$$||f||_\infty = \sup\{\, |f(t)| \quad : \quad t \in [a, b]\,\}.$$

1_2.- Prueba que

- $||f||_\infty = 0$ si y solo si $f = 0$.
- $||\lambda f||_\infty = |\lambda| ||f||_\infty$.
- $||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$.

1_3.- Prueba que una sucesión $(f_n)_n$ de funciones continua sobre $[a, b]$ converge uniformemente a una función f sobre $[a, b]$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_\infty = 0$.

2.- Dada la sucesión de funciones $(f_n)_n$ definidas sobre $[0,1]$ por:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1/n \\ -n^2(x - 2/n) & \text{si} \quad 1/n \leq x < 2/n \\ 0 & \text{si} \quad 2/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

a) Estudia la convergencia uniforme en $[r,1]$ con $r \geq 0$.
b) Comprueba si $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$.
c) ¿Contradice a) y b) lo que sabemos de teoría?

3.- Prueba que si f_n converge uniformemente a f y g_n converge uniformemente a g, el producto $f_n g_n$ puede **no** converger uniformemente a fg.