AVR PRÁCTICA-REPASO DE SERIES

Nombre y apellidos...

1.- Prueba que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n$$ TOMANDO LÍMITES

$$\lim_{N\to\infty} a_N = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n\right) \underset{1}{=} \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n - \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N-1} a_n =$$

COMO AMBOS LÍMITES EXISTEN

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$$

2.- Da un ejemplo de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de modo que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

LA SUCESIÓN $\frac{1}{n} \to 0$, Y LA SERIE ARMÓNICA $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$

3.- Calcula $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k-3}{7^k}$. $= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{7}\right)^k - 3\left(\frac{1}{7}\right)^k =$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{7}\right)^3 - 3\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{7}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^3 - 3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^k =$$

COMO EXISTEN LOS LÍMITES — SERIES ARMÓNICAS

$$= \frac{\frac{3}{7}}{1-3/7} - 3\,\frac{\frac{1}{7}}{1-1/7} = \frac{3}{4} - \frac{3}{6} = \frac{18-12}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

4.- Determina si son convergentes a no las siguientes series (**Indicación:** Recuerda los criterios de comparación, de comparación por cociente, del cociente y él de la integral).

.- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^k}$

COMO $f(x) = \frac{1}{(\ln x)^k}$ ES POSITIVA Y DECRECIENTE LA SERIE CONVERGE SI EXISTE $\int_2^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^k}\,dx$. COMPARAMOS CON $g(x) = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{(\ln x)^k}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^k}{x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{k(\ln x)^{k-1}}{x} =$$

$= $ L'HÔPITAL $k-1$ VECES $= \lim_{x\to\infty} \frac{k!}{x} = 0 \Rightarrow x \sim \infty \quad \frac{1}{x} \le \frac{1}{(\ln x)^k}$

COMO $\int_2^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ DIVERGE, $\int_2^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^k}$ DIVERGE Y TAMBIÉN LA SERIE

.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$

CRITERIO DEL COCIENTE $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}}\frac{(n+1)^3}{n^3} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{(n+1)^3}{n^3} = 1/2 < 1$, LUEGO LA SERIE ES CONVERGENTE

COMPARAMOS CON $\frac{1}{n}$

.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{1+1/n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1+1/n}}{n} = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$ COMO $\sum \frac{1}{n}$ DIVERGE $\Rightarrow \sum \frac{1}{n^{1+1/n}}$ DIVERGE

.- $\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$ COMO ANTES $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1$ $\left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\right)$

POR TANTO LA SERIE DIVERGE.

.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ CRITERIO DEL COCIENTE.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n\, n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{3^n}\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 3\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{3}{e} > 1$$ LA SERIE DIVERGE.

5.- Calcula el dominio de la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n}$.

PARA $x > 0$ $f(x) > 0$

PARA $x < 0$ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n}$ VEAMOS PARA QUE UNA SERIE ALTERNADA

TOMAMOS VALORES ABSOLUTOS $\sum \left|\frac{x^n}{3n}\right| = \sum \frac{|x|^n}{3n}$

APLICAMOS EL CRITERIO DEL COCIENTE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{3(n+1)}}{\frac{|x|^n}{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{3(n+1)}|x| = |x|$$

LUEGO SI $|x| < 1$ LA SERIE CONVERGE ABSOLUTAMENTE Y POR TANTO LA SERIE ES CONVERGENTE ; SI $x > 1$ LA SERIE DIVERGE

$(-1, 1) \subseteq \operatorname{Dom} f$

SI $x = 1$ $\sum \frac{1}{3n}$ ES DIVERGENTE

SI $x = -1$ $\sum \frac{(-1)^n}{3n}$ ES CONVERGENTE POR EL CRITERIO DE LEIBNIZ.

SI $x < -1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{(x)^n}{3n} \neq 0$, LUEGO LA SERIE NO CONVERGE.

$\operatorname{Dom} f = [-1, 1)$