EXAMEN DE 2º PARCIAL. ANÁLISIS DE VARIABLE REAL (m5).

20 de Mayo de 2024.

1.- (1 punto). Sea $f(x) = \sqrt{1-x}$. Para que puntos del domonio de f se verifica que

$$|f(x) - 1| \geq \frac{1}{2}.$$

2.- (1 punto). Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y derivables en $[a, b]\backslash\{s\}$, $s \in (a, b)$, con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]\backslash\{s\}$. Si existen

$$\lim_{x\to s^-} f(x) = \lim_{x\to s^-} g(x) = 0$$

y existe el límite $\lim_{x\to s^-} \frac{g'(x)}{f'(x)}$, prueba que existe

$$\lim_{x\to s^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to s^-} \frac{g'(x)}{f'(x)}.$$

3.- (1 punto) Calcula $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{\frac{1}{\sqrt{-\ln(1-x)}}}$.

4.- (1 punto) Encuentra una función $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ derivable en todo $[0, 1]$, tal que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in (\epsilon, 1)$, $\epsilon > 0$ y con $\int_0^1 \varphi(x)dx < 1$.

5.- (1 punto) Calcula $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^2(x) - x\ln(x^2) + x}$.

6.- (1 punto) Prueba que $\ln x \leq \frac{1}{e}(x - e) + 1$ para todo $x > 0$.

7.- (1 punto) Sea $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ una función continua en $(0, \infty)$ de modo que

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f dx = \frac{1}{n^2} \qquad \text{y} \qquad \int_n^{n+\frac{1}{n}} f dx = \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. ¿Existe $\int_0^1 f dx$? ¿Existe $\int_0^\infty f dx$? Justifica la respuesta.

8.- (1 punto) Se considera la serie de potencias centrada en a y con coeficientes r^n dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n(x-a)^n$, con $0 < r < a < \frac{1}{2}$.

.- Calcula el radio de convergencia.

.- Calcula su límite puntual.

.- ¿Converge la serie de potencias uniformemente en el intervalo $[-1, 1]$? Justifica la respuesta.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

Revisión del examen: Lunes 27 de Mayo a las 9h en el despacho 484. **No** es obligatorio acudir a la revisión.

Problema adicional. Resolver solo después de contestar a los 8 problemas anteriores. Sea la serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con radio de convergencia $r > 0$. Supongamos que

.- $f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ es convergente.

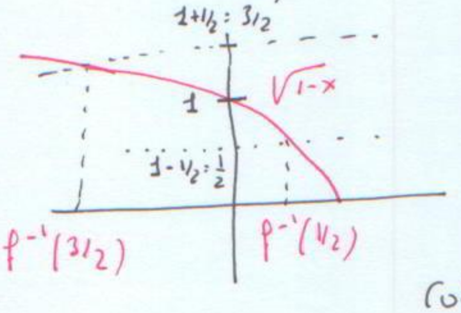
.- Existe $M > 0$ de modo que la derivada $(\sum_{n=0}^{N} a_n x^n)'$ está acotada en valor absoluto por M en $(-r, r)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prueba que f es continua en $x = r$.

EXAMEN

PROBLEMA 1: $f(x) = \sqrt{1-x}$

$\text{Dom } f = (-\infty, -1]$; $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} < 0 \Rightarrow f$ decreciente



$f(x) \geq 0$ y $f(1) = 0$

$f(1) = 1$

Como f es estrictamente decreciente y continua, el recinto buscado es

$$(-\infty, f^{-1}(3/2)] \cup [f^{-1}(1/2), 1] =$$

$$\sqrt{1-x} = 3/2 \iff 1-x = \frac{9}{4} \iff x = 1 - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$\sqrt{1-x} = 1/2 \iff 1-x = \frac{1}{4} \iff x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$= (-\infty, -5/4] \cup [3/4, 1].$$

PROBLEMA 2: Como existe $\lim_{x \to s^-} f(x) = \lim_{x \to s^-} g(x) = 0$ con $f, g\ [a,s] \to \mathbb{R}$ podemos considerar que $f(s) = g(s) = 0$ continuas con $x = s$ con teorema del valor medio de Cauchy, para $[x,s]$ por el teorema del valor medio de Cauchy.

$$\frac{g(x) - g(s)}{f(x) - f(s)} = \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} \quad \xi \in (x,s).$$

Si $\ell = \lim_{x \to s^-} \dfrac{g'(x)}{f'(x)}$ defin $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists\, x_0 < s$ tal que si $x_0 < \xi < s \Rightarrow \left| \dfrac{g'(\xi)}{f'(\xi)} - \ell \right| < \varepsilon$

Ahora si $x_0 < x < s$

$$\left| \frac{g(x)}{f(x)} - \ell \right| = \left| \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)} - \ell \right| < \varepsilon.$$

$\xi \in (x,s)$

Luego por definición de límite $\lim_{x \to s^-} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \ell.$

EXAMEN

PROBLEMA 3:] $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{\frac{1}{\sqrt{-\ln(1-x)}}}$

ESTAMOS ANTE UNA INDETERMINACIÓN 0^0

COMO $\ln x$ ES MONÓTONA Y CONTINUA

EXISTE $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{\frac{1}{\sqrt{-\ln(1-x)}}} = \ell \iff$

EXISTE $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln\left[(1-x)^{\frac{1}{\sqrt{-\ln(1-x)}}}\right] = \ln \ell.$

AHORA $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln\left[(1-x)^{\frac{1}{\sqrt{-\ln(1-x)}}}\right] =$

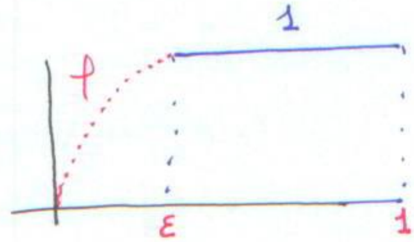
PROPIEDADES DEL LOGARITMO

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{-\ln(1-x)}} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-(-\ln(1-x))}{\sqrt{-\ln(1-x)}} = \lim_{x\to 1^-} -\sqrt{-\ln(1-x)} = -\infty$$

LUEGO $\ell = 0$.

PROBLEMA 2:]



$f(x)=1 \quad \forall x\in[\varepsilon,1].$

AHORA NECESITAMOS DISEÑAR f EN $[0,\varepsilon]$ DE MODO QUE

$f\geq 0$, $f(0)=0$ DERIVABLE, $f(\varepsilon)=1$ Y $f'(\varepsilon)=0$

f ES UNA PARÁBOLA

SEA $f(x) = -k(\varepsilon-x)^2+1$, $k>0$,

CON $f(\varepsilon)=1$, $f'(x) = 2k(\varepsilon-x)$ Y $f'(\varepsilon)=0$

FORZAMOS A QUE $f(0)=0$, ES DECIR $-k\varepsilon^2+1=0 \Rightarrow k=\frac{1}{\varepsilon^2}$

LUEGO $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon-x)^2+1 & x\in[0,\varepsilon] \\ 1 & x\in[\varepsilon,1] \end{cases}$

ES CRECIENTE $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{\varepsilon^2}(\varepsilon-x) > 0 & x\in[0,\varepsilon] \\ 0 & x\geq\varepsilon. \end{cases}$ DERIVABLE.

AHORA $\int_0^1 f = \int_0^\varepsilon f + \int_\varepsilon^1 1 < \int_0^\varepsilon 1 + \int_\varepsilon^1 1 = \varepsilon + (1-\varepsilon) = 1.$

$-\frac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon-x)^2+1 < 0$
SI $x\in[0,\varepsilon)$

EXAMEN

PROBLEMA 5:

$$\int \frac{dx}{x\ln^2 x - x\ln x^2 + x} = \int \frac{dx}{x(\ln^2 x - 2\ln x + 1)} =$$

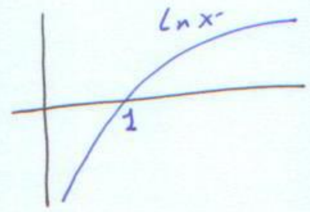
$$= \int \frac{dy}{y^2 - 2y + 1} = \int \frac{1}{(y-1)^2}\,dy = -\frac{1}{y-1} =$$ $y = \ln x$

CAMBIO
$y = \ln x$
$dy = \frac{1}{x}\,dx$

$$= -\frac{1}{(\ln x) - 1}$$

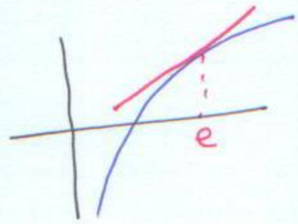
PROBLEMA 6:

$$\ln x \le \frac{1}{e}(x-e)+1 \qquad x > 0$$



$\ln x$ es continua y cóncava

$y(x) = \frac{1}{e}(x-e)+1$ es la recta tangente a $\ln x$ en $(e, 1)$



¿Es correcto el resultado?

Sea $h(x) = \ln x - \frac{1}{e}(x-e) - 1$.

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} \begin{cases} >0 & \text{si } x \in (0,e) \ (\Rightarrow h \text{ crece}) \\ =0 & \text{si } x = e \\ <0 & \text{si } x > e \ (\Rightarrow h \text{ decrece}) \end{cases}$$

Luego h tiene en $x = e$ un máximo,

como $h(e) = 0$, se tiene que $0 \geq h(x) \quad \forall x \geq 0$

Luego $0 \geq h(x) = \ln x - \left(\frac{1}{e}(x-e)+1\right) \Leftrightarrow \quad \forall x \in [0, \infty)$

$\Leftrightarrow \ln x \le \frac{1}{e}(x-e)+1$

EXAMEN

PROBLEMA 7:] $f\ [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ es continua y positiva

$F(x) = \int_x^1 f(x)\,dx \quad x>0$, está bien definida

y es derivable $F'(x) = -f(x) < 0$ (F decreciente)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{r\to 0^+} F(r) = \lim_{r\to 0^+} \int_r^1 f(x)\,dx \underset{\downarrow}{=}$$

en particular por ser F monótona y $\frac{1}{n} \to 0$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^1 f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

existe.

Por otra parte $F(x) = \int_1^x f$ es continua y derivable $F'(x) = f(x) > 0$ (F creciente)

$$\int_1^\infty f \underset{\downarrow}{=} \lim_{r\to\infty} \int_1^r f \underset{\downarrow}{=} \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+\frac{1}{n}} f\,dx \geq$$

definición

por ser F monótona y $n+\frac{1}{n} \to \infty$

$$\geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+\frac{1}{k}} f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

no converge.

$\boxed{f \geq 0}$

EXAMEN

PROBLEMA 8: $\sum_{n=1}^{\infty} r^n (x-a)^n$ CON $0 < r < a < 1/2$

USANDO EL CRITERIO DE COCIENTE PARA HALLAR EL RADIO DE CONVERGENCIA

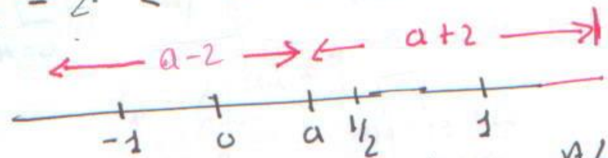
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|r^{n+1}(x-a)^{n+1}|}{|r^n (x-a)^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}}{r^n} \frac{|x-a|^{n+1}}{|x-a|^n} =$$

$$= r|x-a| \begin{cases} < 1 & \text{LA SERIE CONVERGE} \Rightarrow |x-a| < \frac{1}{r} \\ > 1 & \text{LA SERIE DIVERGE} \Rightarrow |x-a| > \frac{1}{r} \end{cases}$$

EL RADIO DE CONVERGENCIA ES $\frac{1}{r}$

COMO $r < 1/2 \Rightarrow 2 < \frac{1}{r}$.

LUEGO $a - \frac{1}{r} < \frac{1}{2} - 2 < -1 < 1 < 0 + 2 < a + \frac{1}{r}$



ALLÍ HAY-

LUEGO $[-1,1] \subsetneq (a - \frac{1}{r}, a + \frac{1}{r})$

CONVERGENCIA UNIFORME

EL LÍMITE PUNTUAL ES $\sum_{n=1}^{\infty} r^n (x-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (r(x-a))^n =$

$$\underset{(1)}{=} \frac{r(x-a)}{1-(x-a)}$$

(1) SERIE GEOMÉTRICA SI $|r(x-a)| < 1$

EXAMEN

PROBLEMA ADICIONAL

TENEMOS QUE VER QUE

$$\lim_{x\to r^-} f(x) = \lim_{x\to r^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = f(r)?$$

USAREMOS LA DEFINICIÓN DE LÍMITE, ASÍ QUEREMOS QUE

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right|$$ SEA PEQUEÑO SI x ESTÁ CERCA DE r.

(1) SEA $\varepsilon > 0$ COMO $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ ES CONVERGENTE, EXISTE N_0

TAL QUE $\forall N > N_0$ $\left| \sum_{n>N}^{\infty} a_n r^n \right| < \varepsilon/2$

SEA $N > N_0$

$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_n r^n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \right| = \left| \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \xi^n\right)' \right| |x-r| \le M|x-r|$$

$f_N = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ CONTINUA Y DERIVABLE. APLICAMOS EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO $\xi \in (x, r)$

MÁXIMO

SI $|x-r| \le \dfrac{\varepsilon}{2M}$, ENTONCES

(2)
$$\boxed{\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \right|} \le \left| \sum_{n=0}^{N} a_n r^n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + \sum_{n>N}^{\infty} a_n r^n \right| \le$$

(3)
$$\le \left| \sum_{n=0}^{N} a_n r^n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \right| + \left| \sum_{n>N}^{\infty} a_n r^n \right| \le M \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$|x-r| < \frac{\varepsilon}{2M}$

PARA TODO $N \geq N_0$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \right| \le \varepsilon \quad \forall N \text{ y } |x-r| \le \frac{\varepsilon}{2M}$$

LUEGO TOMANDO LÍMITE

$$\Big\downarrow N \to \infty$$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right| \le \varepsilon.$$

LUEGO, PARA $\varepsilon > 0$ SI $|x-r| < \frac{\varepsilon}{2M} \Rightarrow |f(r) - f(x)| < \varepsilon \left(\Longleftrightarrow \lim_{x\to r^-} f(x) = f(r)\right)$