EXAMEN EXTRAORDINARIO. AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS.

14 de Junio de 2024.

1.- Se considera la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx)}$ donde $x \geq 0$.

1. Para n fijo, calcula el punto $x_n > 0$ para el cual $f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx)}$ alcanza su máximo valor y calcula $f_n(x_n)$.
2. Usa la Prueba M-Weierstrass para estudiar si la serie converge uniformemente.

2.- Calcula la serie de Fourier de $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$ para $x \in [-\pi, \pi]$:

3.- Sea la E.D.O. $x''(t) + x(t) = f(t)$. Encuentra f de modo que todas las soluciones de la E.D.O. sean 2π-periódicas.

4.- Calcula las dos primeras cifras del número 7^{328} (unidades y decenas).

5.- Dado el polinomio $p(x) = x^4 - x^2 - 6$.

1. Descomponlo en producto de factores irreducibles en $\mathbb{Z}_3[x]$ y $\mathbb{Z}_5[x]$.
2. ¿Cuántas raíces tiene en $\mathbb{Z}_6$?¿Se puede descomponer de manera única como producto de factores irreducibles en $\mathbb{Z}_6[x]$? Justifica la respuesta.

6.- Sea $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5[x]/\left(x^2 + 2x + 4\right)$:

1. Comprueba que es un cuerpo finito.
2. Calcula un representante de $[x^3]$ en $\mathbb{F}$ que tenga grado menor que dos.
3. Calcula el inverso de $[x^4 + x^3 + x + 1]$ en $\mathbb{F}$.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.

El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

Revisión del examen:

.- **Presencial .**

.- Las soluciones del examen se podrán consultar en: http://blogs.mat.ucm.es/cruizb/inicio/docencia-curso-22-23/ampliacion-de-matematicas/examenes-de-am/

La revisión del examen se efectuará el día 20 de Junio a las 16h en el aula 12. No es obligatorio solicitar la revisión.

EXAMEN

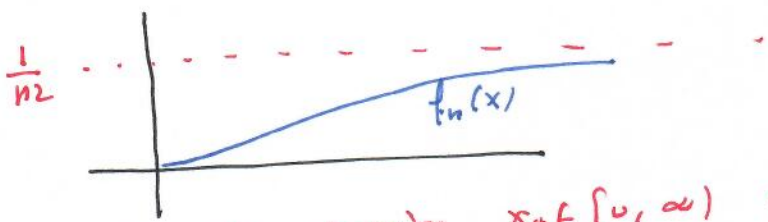
PROBLEMA 1:) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx)}$ $\quad x \geq 0$

SEA $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx)} = \dfrac{x}{n+n^2x}$

$f_n(0) = 0$; $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x}{n+n^2x} = \frac{1}{n^2}$

$$f_n'(x) = \frac{1}{(n+n^2x)^2}\left[(n+n^2x) - n^2x\right] = \frac{n}{(n+n^2x)^2} > 0 \quad \forall x \in [0,\infty)$$

ASÍ f_n ES UNA FUNCIÓN ESTRICTAMENTE CRECIENTE.



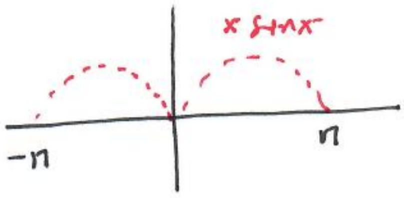
AUNQUE NO EXISTE $x_n \in [0,\infty)$ MÁXIMO PARA f_n, TENEMOS QUE $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in [0,\infty)$

AHORA USANDO LA PRUEBA M-WEIERSTRASS

COMO $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, SE SIGUE QUE LA SERIE DE FUNCIONES $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx)}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE EN $[0,\infty)$ A SU LÍMITE PUNTUAL.

EXAMEN

PROBLEMA 2:] $f(x) = x \operatorname{sen} x \quad x \in [-\pi, \pi]$ ¿Serie de Fourier?



$$f(-x) = (-x)\operatorname{sen}(-x) = x \operatorname{sen} x \qquad f \text{ es par}$$

Por tanto los coeficientes

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx = 0} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{\frac{a_0}{2}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{sen} x\,dx \underset{f \text{ par}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\,dx \underset{\text{partes}}{=}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\Big[-\pi\underbrace{\cos\pi}_{-1} + (\underbrace{\operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi}}_{0})\Big]$$

$$\boxed{= 1}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{sen} x\cos nx\,dx \underset{\text{partes}}{=} \frac{1}{\pi}\Bigg[\underbrace{\frac{x\operatorname{sen} x\operatorname{sen} nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0}$$

$$-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}(\operatorname{sen} x + x\cos x)\operatorname{sen} nx\,dx\Bigg] =$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} x\operatorname{sen} nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\operatorname{sen} nx\,dx\right]$$

PARA $n = 1$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{sen} x\cos x\,dx \underset{\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2 x\,dx = \pi}{=} -\frac{1}{\pi}\left[\pi + \int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\operatorname{sen} x\,dx\right] =$$

$$= -1 - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\operatorname{sen} x\,dx$$

Despejando $\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{sen} x\cos x\,dx = -1$ por tanto

$$\boxed{a_1 = -1/2}$$

PARA $n \geq 2$ como $\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} x\operatorname{sen} nx\,dx = 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{sen} x\cos nx\,dx = \frac{-1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\operatorname{sen} nx\,dx \underset{\text{partes}}{=}$$

EXAMEN

PROBLEMA 2:] CONTINUACIÓN

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}\,x\cos nx\,dx = \frac{-1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\,\mathrm{sen}\,nx\,dx =$$

$\downarrow$ PARTES

$$= \frac{-1}{n\pi}\left[\left(-x\cos x\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x - x\,\mathrm{sen}\,x)\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{-1}{n^2\pi}\left[-\pi\cos\pi\cos n\pi - \pi\cos(-\pi)\cos n(-\pi) + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos nx\,dx}_{0} - \int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}\,x\cos nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{-1}{n^2\pi}\left[2\pi(-1)^n - \int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}\,x\cos nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{n^2}(-1)^{n+1} + \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}\,x\cos nx\,dx$$

DESPEJANDO

$$\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\right)\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}\,x\cos nx\,dx = \frac{2}{n^2}(-1)^{n+1}$$

ASÍ

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}\,x\cos nx\,dx = \frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}\,\frac{2}{n^2}(-1)^{n+1} =$$

$$= \boxed{\frac{2}{n^2-1}(-1)^{n+1}}$$

LA SERIE DE FOURIER BUSCADA ES:

$$1 - \frac{1}{2}\cos x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}(-1)^{n+1}\cos nx$$

EXAMEN

PROBLEMA 3:) $x''(t) + x(t) = f(t)$

EC CARACTERÍSTICA DE LA HOMOGÉNEA ASOCIADA

$$\lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda = \pm i$$

LUEGO $x(t) = A\cos t + B\,\mathrm{sen}\,t \qquad A, B \in \mathbb{R}$

ES LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O HOMOGÉNEA ASOCIADA. OBSERVEMOS QUE $A\cos t + B\,\mathrm{sen}\,t$ SIEMPRE ES 2π-PERIÓDICA

LA SOLUCIÓN GENERAL DE $x''(t) + x(t) = f(t)$

ES $x(t) = x_0(t) + A\cos t + B\,\mathrm{sen}\,t$.

SI $x_0(t)$ ES 2π-PERIÓDICA, POR EJEMPLO

$x_0(t) = \mathrm{sen}\,2t$ $\quad (x_0' = 2\cos 2t \quad x_0'' = -4\,\mathrm{sen}\,2t$.

ENTONCES $x_0'' + x_0 = f(t)$ ASÍ

$-4\,\mathrm{sen}\,2t + \mathrm{sen}\,2t = -3\,\mathrm{sen}\,2t$

LUEGO TENDREMOS QUE TOMAR $f(t) = -3\,\mathrm{sen}\,2t$.

AUNQUE ES MÁS FÁCIL CONSIDERAR $f \equiv 0$, LA EDO ES POR TANTO HOMOGÉNEA Y TODAS SUS SOLUCIONES 2π-PERIÓDICAS

EXAMEN

PROBLEMA 4:] $7^{328} \equiv x \mod 100$

Como $\mathbb{Z}_{100} \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25}$

y φ $\mathbb{Z}_{100} \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{25}$

$a \longrightarrow ([a]_4, [a]_{25})$

es un isomorfismo

$\varphi(7^{328}) = ([7]_4^{328}, [7]_{25}^{328}) =$

$= ([3]_4^{328}, [7]_{25}^{328})$

Como $\text{mcd}(3,4)=1$ y $\phi(4) = 2^2(1-\frac{1}{2}) = 2$

$[3]_4^{328} = [3]_4^{2 \times 164} \equiv 1 \mod 4$

Como $\text{mcd}(7,25)=1$ y $\phi(25) = 5^2(1-\frac{1}{5}) = 20$

$328 \;|\underline{20}$
$128 \;\; 16$
8

$[7]_5^{328} = [7]_5^{20 \times 16+8} = [7]_{25}^8 = [49 \times 49 \times 49 \times 49]_{25} =$

$= [(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)]_{25} = [1]_{25}$

Luego $\varphi(7^{328}) = ([1]_4, [1]_5)$

Nuestra x verifica

$x \equiv 1 \mod 4$
$x \equiv 1 \mod 25$

Claramente $x \equiv 1 \mod 100$

Usando el teorema chino del resto

$x = 1 \times 25 + 1 \times 4 \times 19 = 25 + 76 = 101 \equiv 1 \mod 100$

$4 \times 6 = 24 \equiv -1 \mod 25$

Luego $4 \times (-6) = 4 \times 19 \equiv 1 \mod 25$

Luego las dos primeras cifras de 7^{328}

son $\underline{\underline{01}}$

EXAMEN

PROBLEMA 5: $p(x) = x^4 - x^2 - 6$

// Si $p(x) = x^4 - x^2 - 6 \in \mathbb{Z}_3[x]$ $\quad 6 \equiv 0 \mod 3$

Así $p(x) = x^4 + 2x^2 = x^2(x^2+2) = \underbrace{x^2(x+2)(x+1)}$

1 y 2 son raíces de x^2+2

Descomposición en potencias de factores irreducibles

// Si $p(x) = x^4 - x^2 - 6 \in \mathbb{Z}_5[x]$

$6 \equiv 1 \mod 5$ y $-1 \equiv 4 \mod 5$

$p(x) = x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2+2)^2$ $\quad$ Descomposición en potencias de factores irreducibles

Ya que x^2+2 es irreducible

si $f(x) = x^2+2$, $f(0) \neq 2$, $f(1) = 3 \neq 0$, $f(2) = 6 \equiv 1 \neq 0$

$f(3) = 11 \equiv 1 \neq 0$ y $f(4) = 18 \equiv 3 \neq 0$

// Si $p(x) = x^4 - x^2 - 6 \in \mathbb{Z}_6[x]$ $\quad 6 \equiv 0 \mod 6$

$p(x) = x^4 + 5x^2 = x^2(x^2+5) = x^2(x+5)(x+1)$

Así $x=0$ es raíz doble, $x=1$ y $x=5$ son raíces

Como $\mathbb{Z}_6$ **NO** es un cuerpo vemos que

$p(2) = 4(4+5) \equiv 0 \mod 6$

$p(3) = 9(9+5) \equiv 0 \mod 6$

$p(4) = 16(16+5) \equiv 0 \mod 6$

$p(5) = 25(25+5) \equiv 0 \mod 6$

También 2, 3, 4, 5 son raíces de p

¿Cómo es posible que un polinomio de grado cuatro tenga 6 raíces distintas? Por que $\mathbb{Z}_6$ **NO** es un cuerpo ¡tiene divisores de cero!

Por tanto en $\mathbb{Z}_6[x]$ el teorema de factorización única no tiene por qué ser verdad.

Ejemplo $p(x) = x^2(x+5)(x+1)$, pero también

$p(x) = x(x+3)(x+5)(x+4)$

Ya que $x(x+3) = x^2 + 3x$ $\quad (x+5)(x+4) = x^2 + 9x + 20 = x^2 + 3x + 2$

Ahora $(x^2+3x)(x^2+3x+2) = x^4 + \cancel{3x^3} + 2x^2 + \cancel{3x^3} + 9x^2 + \cancel{6x} =$

$= x^4 + 11x^2 = x^4 + 5x^2 = p(x)$.

No hay una única descomposición

EXAMEN

PROBLEMA 6: $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5[x]/x^2+2x+4$

// $f(x) = x^2+2x+4 = (x+1)^2+3$ es un polinomio de 2º grado

no tiene raíces

$f(0) = 4 \neq 0$

$f(1) = 4+3 = 2 \neq 0$

$f(2) = 9+3 = 2 \neq 0$

$f(3) = 16+3 = 4 \neq 0$

$f(4) = 3 \neq 0$

por tanto f es irreducible y $\mathbb{F}$ un cuerpo de $5^2 = 25$ elementos.

// $[x^3] \in \mathbb{F}$ observamos que en $\mathbb{F}$

$$x^2+2x+4 = 0$$

multiplicando por x

$$x(x^2+2x+4) = x^3+2x^2+4x = 0$$

Así $x^3 = -2x^2-4x = 3x^2+x =$

$= 3(x^2+2x) = 3(x^2+2x+4+1) =$

$= 3(x^2+2x+4)+3 = 3$ $\quad x^2+2x+4=0$

tenemos que $[x^3] = 3$

// $x^4+x^3+x+1 \in \mathbb{F}$ $\quad x^4 = x\,x^3 = 3x$, $\quad x^3 = 3$

Luego $x^4+x^3+x+1 = 3x+3+x+1 = 4x+4$

tenemos que calcular un inverso de $4x+4$

Ahora

$$\begin{array}{l|l} x^2+2x+4 & 4x+4 \\ \hline -x^2-x & 4x+4 \\ \quad x+4 & \\ \quad -x-1 & \\ \qquad 3 & \end{array}$$

Así $0 = x^2+2x+4 = (4x+4)^2+3$

Luego $(4x+4)(4x+4) = -3 = 2$

Así $(4x+4)\,3(4x+4) = 1$

$[x^4+x^3+x+1]^{-1} = 12x+12 = 2x+2$