Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
Curso 2023-2024

Análisis de Variable Real
31 de mayo de 2024
Grupo M5

EXAMEN FINAL 1er PARCIAL: CONVOCATORIA ORDINARIA

Apellidos: ....

Nombre: ....

Ejercicio 1. Responda a los siguientes apartados:

(a). Enuncie la propiedad arquimediana.

(b). Determine el supremo y el ínfimo del siguiente conjunto $A = \left\{(-1)^k + \frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{N}\right\}$.

(c). Demuestre que si un conjunto A satisface que su conjunto de puntos de acumulación coincide con sus puntos frontera, necesariamente el conjunto A no puede tener puntos interiores.

(d). Represente gráficamente el siguiente conjunto de números complejos $\{z \in \mathbb{C} : z - \overline{z} = 4i\}$.

Ejercicio 2. Dado $a > 0$, se define la sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ dada por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad \text{para } x_0 > 0.$$

Demuestre que $x_n^2 \geq a$ para cada $n \geq 1$ y que la cola de la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es monótona decreciente. ¿Se puede concluir que la sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ es convergente? En caso afirmativo, determine su límite.

Ejercicio 3. La sucesión de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ es una de las sucesiones más famosas de las matemáticas. Se construye mediante la ecuación de recurrencia $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para los valores iniciales $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$. Es sabido que

$$F_n = \frac{\varphi^n - (-1)^n \frac{1}{\varphi^n}}{\sqrt{5}}, \quad \text{para cada } n \geq 0,$$

donde $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es la conocida "razón áurea" (solución de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$).

(a). Enuncie los siguientes dos criterios de convergencia para series: *criterio del cociente* y *criterio de la raíz*. Aplique uno de los dos criterios enunciados para determinar la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1} + 1}.$$

(b). Utilizando la identidad

$$\frac{1}{F_{2n+1} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{\varphi^{2n} + 1} - \frac{\sqrt{5}}{\varphi^{2n+2} + 1}, \quad \text{para todo } n \geq 0,$$

calcule el valor exacto de la serie anterior. ¿Qué nombre reciben este tipo de series?

Ejercicio 4. Responda a los siguientes apartados:

(a). Determine el siguiente límite, si es que existe,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{|x|}{x^2 + x}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2(\sqrt{x^3+4} - \sqrt{x^3})}\right)\right).$$

(b). Demuestre que si $f : [2024, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función tal que $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$, y además $f(x) \geq f(y)$ para todo $x \geq y$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

Revisión del examen. Viernes 7 de junio a las 10:00h (NO ES OBLIGATORIO ACUDIR A LA REVISIÓN).

EXAMEN FINAL. ANÁLISIS DE VARIABLE REAL (m5).

Segundo PARCIAL. 31 de Mayo de 2024.

5.- (1 punto) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Sea $\infty < a < b < \infty$. Prueba que f es uniformemente continua en (a, b).

6.- (1 punto) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f'(c) < 0$ para todo $c \in (a, b)$, prueba que f es decreciente en $[a, b]$.

7.- (1 punto) Encuentra una función $\varphi : [0, 2] \to \mathbb{R}$ continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$ de modo que exista $c \in (0, 2)$ con $f'(c) = 3$.

8.- (1 punto) Calcula $\int_{-\pi}^{\pi} x^2(\cos x + 3 \operatorname{sen} x)dx$.

9.- (1 punto) Existe la siguiente integral (justifica tu respuesta):

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx.$$

10.- Determina el dominio de la función $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 |x| + 1}$. ¿Donde es continua la función?

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

Revisión del examen: El próximo Viernes 7 de Junio a las 10h en el despacho 484. **No** es obligatorio acudir a la revisión.

EXAMEN

PROBLEMA 1.- a) Propiedad arquimediana para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.

b) $A = \{ (-1)^k + \frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{N} \}$

y $-1+\frac{1}{k^2} \downarrow -1$.

$\text{Inf } A = -1$ claro $-1 \le (\pm 1) + \frac{1}{k^2}$

$\text{Sup } A = \frac{5}{4}$ claro que $(\pm 1) + \frac{1}{k^2} \le \frac{5}{4}$ $\forall k$ y $\frac{5}{4} \in A$.

c) Sea $x \in \mathring{A}$ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \subseteq A$

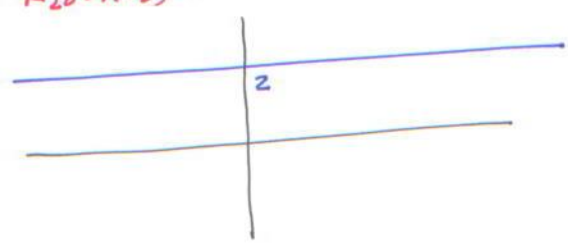
Por lo tanto $\forall r > 0$ $(a-r, a+r) \cap A \supseteq (a-r, a+r) \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \neq \emptyset$.

Luego a es un punto de acumulación de A; por hipótesis también $a \in \partial A$, pero esto es incompatible con ser punto interior.

d) $\{ z \in \mathbb{C} : z - \bar{z} = 4i \} =$

$z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$ así $z - \bar{z} = 2bi \underset{\text{hipótesis}}{=} 4i$ luego $b = 2$.

$= \{ z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = 2 \}$



EXAMEN

PROBLEMA 2: $a>0$ $(x_n)_{n\geq 0}$

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right) \quad \text{con } x_0>1$$

$$x_{n+1}^2=\frac{1}{4}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)^2=\frac{1}{4}\left(x_n^2+2x_n\frac{a}{x_n}+\frac{a^2}{x_n^2}\right)\geq a \text{ ¿?}$$

$$\frac{x_n^2}{4}+\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4x_n^2}\geq a \iff$$

$$\frac{x_n^2}{4}-\frac{2}{2}\frac{a}{2}\frac{x_n}{x_n}+\frac{a^2}{4x_n^2}\geq 0 \iff$$

$$\iff \frac{1}{4}\left(x_n^2-2\frac{a}{x_n}x_n+\frac{a^2}{x_n^2}\right)\geq 0$$

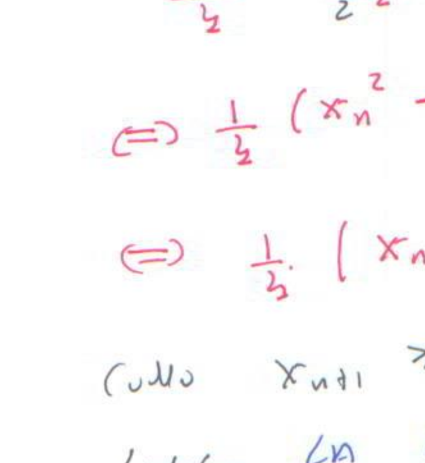
$$\iff \frac{1}{4}\left(x_n-\frac{a}{x_n}\right)^2\geq 0 \quad \text{lo cual es cierto}$$

Como $x_{n+1}\geq 0$ y $x_{n+1}^2\geq a \Rightarrow x_{n+1}\geq\sqrt{a}\ \forall n\geq 0$

Luego la sucesión está acotada inferiormente.

Para ver que la sucesión es decreciente.

Sea $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$ $x>0$ $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 0} f(x)=\infty \\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \end{array}\right.$



$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{x^2}\right)$. $f'(x)=0 \iff x=\sqrt{a}$ mínimo

Además $\boxed{f(\sqrt{a})=\sqrt{a}}$

$f''(x)=\frac{2a}{x^3}>0$ f convexa

$f(x)<x \quad \forall x>\sqrt{a}$ ya que $h(x)=f(x)-x$

$h'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{x^2}\right)-1=$

$=-\frac{1}{2}-\frac{a}{x^2}<0$

Así $\forall x>\sqrt{a} \Rightarrow h(x)=f(x)-x<0$ $\quad$ h decreciente y $h(\sqrt{a})=0$

luego $f(x)<x$.

Como $(x_n)_{n\geq 1}$ es monótona decreciente y acotada es convergente.

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right) \\ \downarrow \qquad\quad \downarrow \\ l \quad =1/2\left(l+\frac{a}{l}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow l=\sqrt{a}.=\lim_{n\to\infty} x_n.$$

EXAMEN

PROBLEMA 3: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ CON $F_0 = F_1 = 1$.

SABEMOS QUE $F_n = \dfrac{\varphi^n - (-1)^n \frac{1}{\varphi^n}}{\sqrt{5}}$ $\quad n \geq 1$

DONDE $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ES LA RAZÓN ÁUREA. (SOLUCIÓN DE $x^2 - x - 1 = 0$).

a) SEA $\sum a_n$ CON $a_n \geq 0$

SI EXISTE $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ Y $\begin{cases} \ell < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ CONVERGE} \\ \ell > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ DIVERGE} \end{cases}$

O BIEN SI EXISTE $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$ Y $\begin{cases} \ell < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ CONVERGE} \\ \ell > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ DIVERGE} \end{cases}$

$$¿ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}+1} < \infty ?$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{F_{2(n+1)+1}+1}}{\dfrac{1}{F_{2n+1}+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}+1}{F_{2n+3}+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\varphi^{2n+1} + \frac{1}{\varphi^{2n+1}}}{\sqrt{5}} + 1}{\dfrac{\varphi^{2n+3} + \frac{1}{\varphi^{2n+3}}}{\sqrt{5}} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^{2n+1} + \frac{1}{\varphi^{2n+1}} + \sqrt{5}}{\varphi^{2n+3} + \frac{1}{\varphi^{2n+3}} + \sqrt{5}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi^2} \left(\frac{\varphi^{2n+1} + \frac{1}{\varphi^{2n+1}} + \sqrt{5}}{\varphi^{2n+1} + \frac{1}{\varphi^{2n+5}} + \frac{1}{\varphi^2}\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{\varphi^2} = \frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} < 1.$$

POR EL CRITERIO DEL COCIENTE LA SERIE ES CONVERGENTE.

b) SE SABE QUE $\dfrac{1}{F_{2n+1}+1} = \dfrac{\sqrt{5}}{\varphi^{2n}+1} - \dfrac{\sqrt{5}}{\varphi^{2n+2}+1}$

LA SERIE $\sum\limits_{n}^{\infty} \dfrac{1}{F_{2n+1}+1}$ ES UNA SERIE TELESCÓPICA

ASÍ $\sum\limits_{n_0}^{\infty} \dfrac{1}{F_{2n+1}+1} = \dfrac{1}{F_{2n_0+1}+1} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{F_{2n+1}+1} = \dfrac{1}{F_{2n_0+1}+1}.$

EXAMEN

PROBLEMA 4:]

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{|x|}{x^2+x}\,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2(\sqrt{x^3+4}-\sqrt{x^3})}\right)\right)$

OBSERVEMOS QUE $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x^2+x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|+\frac{x}{|x|}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x\to 0^+ \\ -1 & \text{si } x\to 0^- \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} 2(\sqrt{x^3+4}-\sqrt{x^3}) = 4$$

LUEGO $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2(\sqrt{x^3+4}-\sqrt{x^3})}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

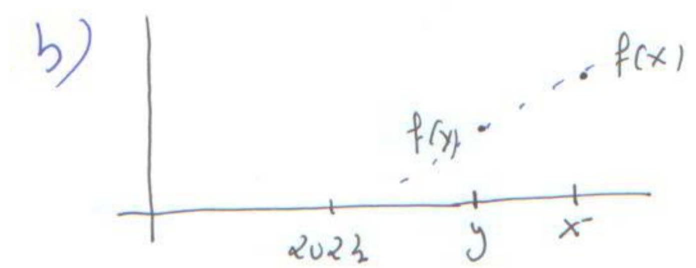
DE LO QUE SE SIGUE QUE

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{|x|}{x^2+x}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2(\sqrt{x^3+4}-\sqrt{x^3})}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\qquad '' \qquad\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

EXISTEN LOS LÍMITES LATERALES, SON DISTINTOS.
LUEGO NO EXISTE EL LÍMITE.

b)



f ES CRECIENTE

Y $\lim_{n\to\infty} f(n) = L.$

LUEGO $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 : n\geq n_0\ \ |L-f(n)|<\varepsilon$

CON 

COMO f ES CRECIENTE $(f(n))_{n=1}^{\infty}$ ES CRECIENTE Y SI EXISTE EL LÍMITE $L=\sup\{f(n) : n\in\mathbb{N}\}.$

ASÍ $L \geq f(n)\ \forall n.$

LUEGO $x\geq n_0$ $\ 0\leq L-f(x)\leq L-f(n_0)\leq\varepsilon$

ASÍ $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0 : x>n_0 \Rightarrow |L-f(x)| = L-f(x)\leq\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=L$

EXAMEN

PROBLEMA 5: SEA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA

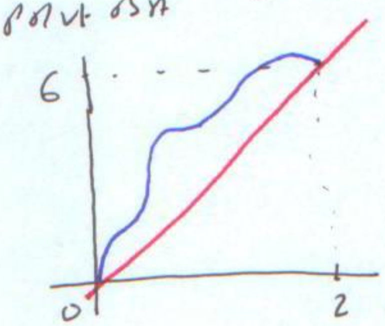
PARA TODO a,b CON $-\infty < a < b < \infty$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ES CONTINUA. TODA FUNCIÓN CONTINUA SOBRE UN INTERVALO CERRADO ES UNIFORMEMENTE CONTINUA (e.d. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ TAL QUE $\forall x, y \in [a,b]$ CON $|x-y| < \delta$, ENTONCES $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$), EN PARTICULAR ES UNIFORMEMENTE CONTINUA EN (a,b).

PROBLEMA 6: SEA $x, y \in [a,b]$ CON $x < y$. POR EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO ($f: [x,y]$ ES CONTINUA Y f ES DERIVABLE EN (x,y)), EXISTE $c \in (x,y)$ TAL QUE

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) < 0$$

YA QUE $y - x > 0$ Y $f'(c) < 0$. LUEGO $f(y) < f(x)$ LO QUE PRUEBA f ES DECRECIENTE.

PROBLEMA 7:



CONSIDERAMOS LA RECTA QUE PASA POR $(0,0)$ Y $(2,6)$ CON PENDIENTE 3 (ASÍ $6 = 3 \cdot 2$).

$y = 3x$

TODA FUNCIÓN f QUE ES CONTINUA EN $[0,2]$ Y DERIVABLE EN $(0,2)$, QUE PASA POR $(0,0)$, $(2,6)$, VERIFICA POR EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO QUE EXISTE $c \in (0,2)$ CON $f'(c) = 3$.

EN PARTICULAR $f(x) = 3x$. VERIFICA LO ANTERIOR.

EXAMEN

PROBLEMA 8:) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2(\cos x + 3\,\text{sen}\,x)\,dx =$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x\,dx + 3\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\text{sen}\,x\,dx =$$

x^2 es par en $[-\pi,\pi]$

$\text{sen}\,x$ es impar en $[-\pi,\pi]$

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\text{sen}\,x\,dx = 0$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x\,dx \underset{\text{por partes}}{=}$$

$$= \cancel{x^2\,\text{sen}\,x}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\,\text{sen}\,x\,dx = -2\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}\,x\,dx \underset{\text{partes}}{=}$$

$$= 2\left[x\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx\right] =$$

$$= 2\left[\pi\cos\pi - (-\pi\cos(-\pi)) + \left(\cancel{\text{sen}\,x}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)\right]$$

$$= \boxed{-4\pi}$$

PROBLEMA 9:) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\ln x\,dx \underset{\text{si existe}}{=} \underbrace{\int_0^1 e^{-x}\ln x\,dx}_{\text{existe}} + \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-x}\ln x\,dx}_{\text{existe}}$

Veámoslo..

Por un lado $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\ln x\,dx$ $\quad e^{-x}\in\left[\frac{1}{e},1\right]$ si $x\in[0,1]$

Luego $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\ln x\,dx$ existe si existe $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx \underset{\text{partes}}{=} \cancel{x\ln x}\Big|_0^1 - \int_0^1 1\,dx =$

$\left(\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0\right)$ $\quad = -1$ existe $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\ln x\,dx$

Por otro lado $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x}\ln x\,dx$, comparando con $e^{-x/2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}\ln x}{e^{-x/2}} = \lim_{x\to\infty} e^{-x/2}\ln x = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^{x/2}} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}e^{x/2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2\frac{e^{-x/2}}{x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{4}\frac{e^{-x/2}}{1} = 0 \ldots$$ Así $\dfrac{e^{-x}\ln x}{e^{-x/2}} \le 1 \quad \forall x \ge N > 0$

Luego $\displaystyle\int_N^{\infty} e^{-x}\ln x\,dx \le \int_N^{\infty} e^{-x/2}\,dx = -2e^{-x/2}\Big|_N^{\infty} = 2e^{-N/2} < \infty$. Existe $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x}\ln x\,dx$

EXAMEN

PROBLEMA 1º] $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2|x|+1}$

SI $x=0$, LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1}$ NO ES CONVERGENTE.

SI $x \neq 0$ COMPARANDO CON $\frac{1}{n^2}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2|x|+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2|x|+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x|+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{|x|} \neq 0$$

COMO LA SERIE $\sum \frac{1}{n^2}$ ES CONVERGENTE, SE SIGUE QUE $\sum \frac{1}{n^2|x|+1}$ ES CONVERGENTE.

Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

SEA $|x| \geq a > 0$, ENTONCES $\frac{1}{n^2|x|+1} \leq \frac{1}{n^2 a+1}$ PARA TODO $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$.

Y COMO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 a+1} < \infty$, SE SIGUE DE LA PRUEBA M-WEIERSTRASS QUE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2|x|+1}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE A f EN $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$ $(\forall a>0)$

COMO CADA $\frac{1}{n^2|x|+1}$ ES CONTINUA EN TODO $\mathbb{R}$, Y HAY CONVERGENCIA UNIFORME, SE SIGUE QUE f ES CONTINUA EN $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$ $(\forall a>0)$

LUEGO f ES CONTINUA EN TODO $x \in \mathbb{R} - \{0\}$