Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
Curso 2023-2024

ANÁLISIS DE VARIABLE REAL
1 de julio de 2024
GRUPO M5

EXAMEN FINAL 1er PARCIAL: CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Apellidos: ....

Nombre: ....

Ejercicio 1. Responda a los siguientes apartados:

(a). Sea el conjunto $A := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. ¿Es cierto que todo conjunto abierto U tal que $A \subset U$ necesariamente satisface que $0 \in U$? Si se considera que la respuesta es sí, dar una demostración, y si se considera que la respuesta es no, dar un contraejemplo.

(b). Enuncie el *teorema de Bolzano-Weierstrass*. Determine razonadamente cuáles de las siguientes sucesiones poseen alguna subsucesión convergente:

$$a_n = \cos\left(2^n \pi^e\right) + \frac{1}{n}, \qquad b_n = \sqrt{n^2 + 3n + 5} \qquad \text{y} \qquad c_n = n \operatorname{sen}(\pi\sqrt{n}), \qquad \text{donde } n \geq 1.$$

(c). Describa el siguiente conjunto de números complejos mediante coordenadas polares

$$B := \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = |1 - 2\overline{z}|\}.$$

(d). Enuncie el *principio de buena ordenación* de los números naturales.

Solución.

(a). FALSO. Basta con considerar el abierto $U = (0, 2)$, pues verifica que $0 \notin U$ y $A \subset U$.

(b). **Teorema de Bolzano-Weierstrass.** *Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales acotada. Entonces, existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ convergente.*

Para deducir cuáles de las sucesiones $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ y $(c_n)_{n\geq 1}$ posee alguna subsucesión convergente, debemos argumentar de manera independiente en cada caso:

- La sucesión $a_n = \cos\left(2^n \pi^e\right) + \frac{1}{n}$ es acotada y, por tanto, posee subsucesiones convergentes en virtud del teorema de Bolzano-Weierstrass. En efecto, se tiene

$$-1 \leq \cos\left(2^n \pi^e\right) + \frac{1}{n} \leq 2, \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

- La sucesión $b_n = \sqrt{n^2 + 3n + 5}$ no posee subsucesiones convergentes. Para comprobarlo, basta con observar que

$$b_n = \sqrt{n^2 + 3n + 5} \geq \sqrt{n^2} = n, \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

- La sucesión $c_n = n \operatorname{sen}(\pi\sqrt{n})$ sí posee subsucesiones convergentes (pese a ser no acotada). Por ejemplo,

$$c_{4k^2} = 4k^2 \operatorname{sen}\left(\pi\sqrt{4k^2}\right) = 4k^2 \operatorname{sen}\left(2\pi k\right) = 0, \quad \text{para todo } k \geq 1.$$

(c). Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad, se tiene

$$\begin{aligned} |z-2|^2 = |1-2\overline{z}|^2 &\iff (z-2)(\overline{z}-2) = (1-2\overline{z})(1-2z) \\ &\iff |z|^2 - 2z - 2\overline{z} + 4 = 1 - 2z - 2\overline{z} + 4|z|^2 \\ &\iff |z|^2 = 1 \\ &\iff |z| = 1. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $B = \{\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta : \theta \in [0, 2\pi)\}$.

(d). **Principio de buena ordenación.** *En cualquier conjunto de números naturales $A \subseteq \mathbb{N}$ distinto del conjunto vacío, existe un mínimo.*

Ejercicio 2. Sea $(a_j)_{j\geq 1}$ una sucesión en el intervalo $(0,1)$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = 0$. Responda a los siguientes apartados:

(a). Demuestre que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ dada por $x_n := \prod_{j=1}^{n}(1-a_j)$ es estrictamente decreciente.

(b). Utilizando las desigualdades $1 - \frac{1}{1-x} \leq \log(1-x) \leq -x$ para todo $x \in (0,1)$, deduzca el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\log(1-x)}{x} = 1.$$

(c). Utilizando el criterio de comparación por cociente, demuestre que $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ es convergente si y solo si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0$.

Solución.

- Obsérvese que $x_n > 0$ para todo $n \geq 1$. Además $x_n = (1-a_n)x_{n-1} < x_{n-1}$ puesto que $0 < 1 - a_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Queremos aplicar el criterio del sandwich. Utilizando las desigualdades propuestas en el enunciado, se tiene que

$$1 \leq \frac{-\log(1-x)}{x} \leq \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x}, \quad \text{para todo } x \in (0,1).$$

  Ahora bien,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x(1-x)} = 1.$$

  Por consiguiente, del criterio del sandwich se concluye que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\log(1-x)}{x} = 1.$$

- Obsérvese que

$$\lim_{n\to\infty} x_n > 0 \iff \lim_{n\to\infty} \log(x_n) > -\infty \iff \lim_{n\to\infty} \log\Big(\prod_{j=1}^{n}(1-a_j)\Big) > -\infty$$
$$\iff \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \log(1-a_j) > -\infty \iff \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \big(-\log(1-a_j)\big) < +\infty.$$

  Por tanto, queremos demostrar que $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ es convergente si y solo si $\sum_{j=1}^{\infty} \big(-\log(1-a_j)\big)$ es convergente. Teniendo en cuenta que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{-\log(1-a_j)}{a_j} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\log(1-x)}{x} = 1,$$

  del criterio de comparación por cociente, queda demostrado el apartado.

Ejercicio 3. Demuestre razonadamente la siguiente afirmación:

Toda sucesión de números reales positivos $(x_n)_{n\geq 1}$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = +\infty$ *necesariamente satisface que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Solución. Por definición, si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = +\infty,$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 2$ para todo $n \geq n_0$. Por tanto, dado $n \geq n_0$ arbitrario se tiene

$$x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} x_{n-1} = \frac{x_n}{x_{n-1}} \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} x_{n-2} = \ldots = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdots \frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}} x_{n_0} > 2^{(n-n_0)} x_{n_0}.$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \geq \lim_{n\to+\infty} 2^{(n-n_0)} x_{n_0} = +\infty$$

y la afirmación del enunciado queda demostrada.

Ejercicio 4. Halle el supremo y el ínfimo del siguiente conjunto

$$S := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^3 + 3j^2 + 2j} \ : \ n \geq 1 \ \text{entero} \right\}.$$

Para ello, transforme la suma que determina los elementos del conjunto S en una suma telescópica. ¿Existe $\min(S)$ y/o $\max(S)$?

Solución. Considérese la sucesión

$$s_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^3 + 3j^2 + 2j}, \qquad \text{para cada } n \geq 1,$$

de modo que $S = \{s_n : n \geq 1\}$. Puesto que

$$s_n - s_{n-1} = \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n} > 0$$

se concluye que la sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ es estrictamente creciente y, por tanto, el conjunto S está acotado inferiormente. De este modo,

$$\frac{1}{6} = s_1 = \min(S) = \inf(S).$$

Utilizando un razonamiento similar, para hallar el supremo del conjunto S, necesitamos hallar el valor de la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^3 + 3j^2 + 2j}.$$

Operando mediante fracciones simples, se tiene

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^3 + 3j^2 + 2j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2j} - \frac{1}{j+1} + \frac{1}{2(j+2)} \right)$$

y, teniendo en cuenta que

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{14} \end{array}$$

se tiene que

$$s_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n-1+2)} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

para cada $n \geq 2$. Por consiguiente,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^3 + 3j^2 + 2j} = \frac{1}{4}$$

de donde se concluye que $\sup(S) = \frac{1}{4}$ y que $\max(S)$ no existe, pues la sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ nunca alcanza su límite al ser estrictamente creciente.

Revisión del examen. Miércoles 3 de julio a las 10:00h (NO ES OBLIGATORIO ACUDIR A LA REVISIÓN).

EXAMEN EXTRAORDINARIO. ANÁLISIS DE VARIABLE REAL (m5).

1 de Julio de 2024 .

5.- (1 punto) Encuentra dos funciones f y g con $Imf \subset Domg$, de modo que existan los límites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to f(a)} g(x)$$

y tales que $\lim_{x \to a} g \circ f(x) \neq g(\, f(a)\,)$.

6.- (1 punto) ¿Tiene solución la ecuación $\ln^2(x) - \frac{1}{e}x + 2 = 0$? Justifica tu respuesta.

7.- (1 punto) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que f tiene en $x = a$ un mínimo local. Si existe $f'(a)$, prueba que $f'(a) = 0$.

8.- (1 punto) Calcula $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + ... + \sqrt[3]{n}}{n\sqrt[3]{n}}$.

9.- (1 punto) Calcula el volumen de revolución que se produce al girar la curva $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, para $x \in [0, \frac{1}{2}]$, alrededor del eje de las "x"(eje $y = 0$).

10.- (1 punto) Encuentra los máximos y mínimos de la función $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}|x-1|^n$.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.
El examen tiene una duración de hasta 3h horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

Revisión del examen: tendrá lugar el día 3 de Julio a las 10h en el despacho 484. **No** es obligatorio acudir a la revisión.

EXAMEN

PROBLEMA 5:] Si f es continua en a y g lo es en $f(a)$, se tendría que $g \circ f$ es continua en $x = a$. Luego tenemos que buscar funciones no continuas pero con límite.

Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,2] \setminus \{1\} \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ $\quad a = 1$

$$\exists \lim_{x \to 1} f(x) = 1 \neq f(1) = 2$$

Sea $g(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \in [0,5] \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ $\quad f(a) = 2$

$$\exists \lim_{x \to f(a)=2} g(x) = 3$$

Ahora $\displaystyle\lim_{x \to 1} g \circ f(x) = \lim_{x \to 1} g(1) = 3 \neq g(f(1)) = g(2) = 5.$

PROBLEMA 6:] Sea $f(x) = \ln^2 x - \frac{1}{e} x + 2.$ $\quad x > 0.$

f continua en su dominio $(0, \infty)$.

Ahora además $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \ln^2 x - \frac{1}{e} x + 2 = \infty$

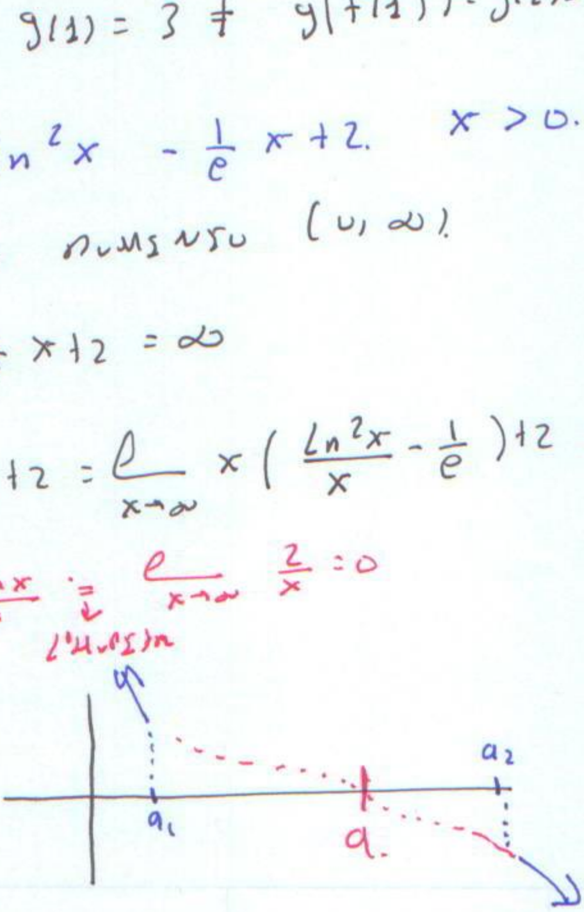
y $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \ln^2 x - \frac{1}{e} x + 2 = \lim_{x \to \infty} x \left(\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{1}{e} \right) + 2 =$

como $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\ln^2 x}{x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2 \ln x}{x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x} = 0$

$= -\infty$

$\displaystyle\lim_{x \to \infty} x = \infty$

$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{1}{e} \right) = -\frac{1}{e}$



$\exists\, a_1 \approx 0$ con $f(a_1) > 0$
$\exists\, a_2 \approx \infty$ con $f(a_2) < 0$
} por el teorema de Bolzano $\exists\, a \in (a_1, a_2)$ con $f(a) = 0$

EXAMEN

PROBLEMA 7:] $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x = a$ mínimo local

Luego existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$ se tiene que

$$f(x) \geq f(a)$$

Así si $x \in (a-\delta, a) \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$

$x-a<0$
$f(x)-f(a) \geq 0$

Si $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$

$x-a \geq 0$
$f(x)-f(a) \geq 0$

Por hipótesis existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ y

Por tanto $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$

y $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$

$\Rightarrow f'(a) = 0$.

PROBLEMA 8:] $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\dots+\sqrt[3]{n}}{n\sqrt[3]{n}} =$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}} + \sqrt[3]{\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{n}{n}}\right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt[3]{\frac{k}{n}} =$$

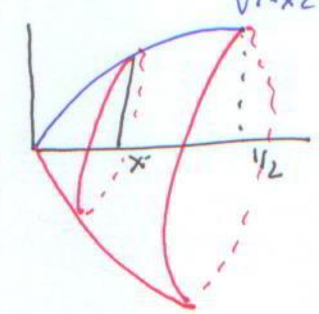
dado que $\sqrt[3]{x}$ es continua en $[0,1]$

$$= \int_0^1 \sqrt[3]{x}\, dx = \int_0^1 x^{1/3}\, dx = \left.\frac{x^{1/3+1}}{1/3+1}\right|_0^1 =$$

$$= \frac{3}{4}$$

EXAMEN $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

PROBLEMA 9:



$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \geq 0$ y $f(0)=0$

El volumen de revolución se calcula con la fórmula.

$$\int_0^{1/2} \pi (f(x))^2\,dx = \int_0^{1/2} \pi \frac{x^2}{1-x^2}\,dx = -\int_0^{1/2} \pi \frac{-x^2+1-1}{1-x^2}\,dx$$

$$= -\int_0^{1/2} \pi + \pi\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx = -\frac{\pi}{2} + \pi\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,dx = $$

fracciones simples

$$= -\pi/2 + \pi\int_0^{1/2} \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}\,dx = -\pi/2 + \pi\left(-\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x)\right)\Big|_0^{1/2} =$$

$$= -\pi/2 + \pi\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\right) = -\pi/2 + \pi\left(\cancel{\frac{1}{2}\ln 2} + \frac{1}{2}\ln 3 - \cancel{\frac{1}{2}\ln 2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}(\ln 3 - 1) > 0.$$

PROBLEMA 10: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |x-1|^n$.

- Radio de convergencia: usando el criterio del cociente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}|x-1|^{n+1}}{\frac{1}{n^2}|x-1|^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 |x-1| = |x-1|. \begin{cases} <1 & \text{converge} \\ >1 & \text{diverge} \end{cases}$$

Luego la serie converge en $(0,2)$ y es una función par respecto $x=1$ (es decir $f(x-1)=f(1-x)$).

Para $x=0$ $f(0) = \sum \frac{1}{n^2}$ convergente.

Para $x=2$ $f(2) = \sum \frac{1}{n^2}$ "

Además $f \geq 0$, si $x>1$ $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2}(x-1)^{n-1} = \sum \frac{1}{n}(x-1)^{n-1} > 0$

Luego f crece en $(1,2)$.

Como $0 = f(1) < f(x)$ $x \neq 1$ — $x=1$ mínimo de la función en su dominio $[0,2]$.

Como f crece en $x \in (1,2)$ y $f(0) < f(x) < f(2)$ $\forall x \in [0,2]$, f par respecto $x=1$

$x=2$ y $x=0$ máximos de la función