ÁLGEBRA LINEAL.

Espacios Vectoriales.

La estructura lineal siguiente aparece repedidamente en Matemáticas como en sus aplicaciones.

Sea V un conjunto y sea $\mathbb{K}$ un cuerpo (para nosotros $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pero también puede ser $\mathbb{C}$ u otros cuerpos; en criptografía serán cuerpos finitos).

Definición 1. *Sea V un conjunto, cuyos elementos llamaremos **vectores**; sobre V tenemos definidas dos operaciones:*

1) *Una **suma***

$$\begin{array}{cccc} + & : & V \times V & \to & V \\ & & (u, v) & \to & u + v \end{array}.$$

2) *Un **producto por escalares***

$$\begin{array}{cccccc} + & : & \mathbb{K} \times V & \to & V & & \\ & & (\lambda, v) & \to & \lambda v & = & v\lambda \end{array}.$$

Con las siguientes propiedades:

***para la suma**,*

si $u, v, w \in V$ se tiene las propiedades

a_1) ***Conmutativa:*** $u + v = v + u$

a_2) ***Asociativa:*** $u + (v + w) = (u + v) + w$

a_3) ***Elemento neutro:*** *existe $0 \in V$ tal que $u + 0 = 0 + u = u$.*

a_4) ***Elemento opuesto:*** *para cada u, existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$.*

***Para el producto por escalares**,*

Si $u, v \in V$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$ se tienen las propiedades:

b_1) $(\lambda + \beta)u = \lambda u + \beta u$.

b_2) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

b_3) $\lambda(\beta u) = (\lambda\beta)u$.

b_4) $1u = u$.

A este conjunto, con sus operaciones y propiedades $(V, +, \times)$ le llamamos ***Espacio Vectorial*** *sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.*

Ejemplos 1.

- *$\mathbb{R}^2$ con la suma de vectores y el producto escalar es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.*

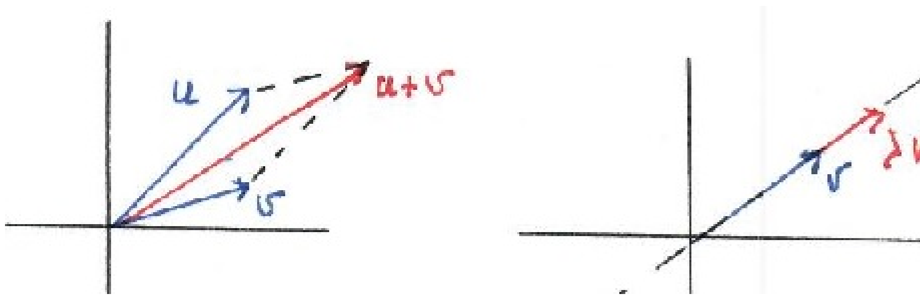

FIGURA 1. Operaciones en $\mathbb{R}^2$

- *En general $\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, ..., x_n) \quad : \quad x_1, ...x_n \in \mathbb{R} \}$ con la suma de vectores y el producto por escalares*

$$\text{suma: } (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$
$$\text{producto por escalares : } \lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$$

  es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.
- *El conjunto de matrices $n \times m$ $(n, m \in \mathbb{N})$,*

$$M_{n\times m}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \quad : \quad a_{i,j} \in \mathbb{R} \right\}$$

  con la suma de matrices y el producto por un escalar es otro ejemplo de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.
- *Las funciones continuas*

$$C[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \ f \textit{ continua} \},$$

  con la suma de funciones y el producto de un escalar por una función, es otro ejemplo de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Proposición 1. *Sea V un espacio vectorial, entonces se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Para todo $u, v, w \in V$, si $v + u = v + w$, entonces*
$$u = w.$$
2. *Si $0_1, 0_2 \in V$ son dos elementos neutros para la suma de V, entonces*
$$0_1 = 0_2,$$

es decir el elemento neutro es único.

3. *Si* $0 \in \mathbb{R}$, *entonces para todo* $v \in V$ *se tiene que*

$$0v = 0 \in V$$

Demostración:

1. Si $v+u=v+w$, como existe el opuesto de v, es decir tomamos $-v$ y sumamos en ambos lados de la igualdad

   $$-v+(v+u) = -v+(v+u),$$

   aplicando la propiedad asociativa y que $-v+v=0$ (elemento neutro), llegamos a que

   $$u = w.$$

2. Si $0_1, 0_2 \in V$ son dos elementos neutros para la suma de V, entonces

   $$0_1 + 0_2 = 0_2,$$

   pero también

   $$0_1 + 0_2 = 0_1,$$

   de lo que se sigue que

   $$0_1 = 0_2.$$

3. Si $0 \in \mathbb{R}$, entonces $0+1=1$ y así

   $$1v = (0+1)v = 0v + 1v.$$

   Aplicando el apartado 1. tenemos que

   $$0v = 0 \in V \qquad \square$$

Ejercicio 1. *Dado el conjunto* $A = \{\, (x,y) \ : \ x,y \in \mathbb{R}\,\}$ *con la suma*

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$

y el producto por escalares

$$\lambda(x,y) = (\lambda x, 0) \qquad \textit{para} \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

¿es $(A, +, \times)$ *un esapcio vectorial ?*

Demostración: La suma es la misma que la de vectores en $\mathbb{R}^2$, luego va a tener las mismas propiedades. Ahora el productopor escalares da problemas ya que si $(x,y) \in A$ con $y \neq 0$, entonces

$$1(x,y) = (1x, 0) = (x,0) \neq (x,y).$$

Luego no se verifican todas las propiedades de espacio vectorial y así no es un espacio vectorial □

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es