

ÁLGEBRA LINEAL.

Dependencia Lineal.

En un espacio vectorial V , un sistema de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ no es más que una familia (o subconjunto) finita de vectores de V .

Definición 1. Dado un sistema de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ de un espacio vectorial V se dice que el vector $u \in V$ es **combinación lineal** de los vectores del sistema si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ de modo que

$$u = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Ejemplo 1. Consideramos el sistema de vectores de \mathbb{R}^2 dado por $\{e_1, e_2\}$ donde

$$e_1 = (1, 0) \quad \text{y} \quad e_2 = (0, 1).$$

Entonces, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$(x, y) = x e_1 + y e_2,$$

es decir el vector (x, y) es combinación lineal de los vectores e_1 y e_2

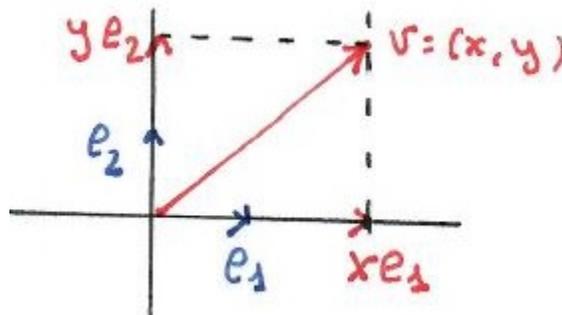


FIGURA 1. Combinación lineal.

Ejemplo 2. En general en \mathbb{R}^n , si consideramos los vectores

$$e_k = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

donde el "1" del vector e_k aparece en la k -ésima coordenada, entonces para todo vector

$$u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

se tiene que

$$u = \sum_{k=1}^n x_k e_k,$$

es decir u es combinación lineal de los vectores del sistema $\{e_k\}_{k=1}^n$.

Esta situación en la que todos los vectores de un espacio vectorial se pueden representar como combinación lineal de unos pocos, vamos a ver que es algo general.

Observación 1. Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un sistema de vectores de V , entonces

a) $0 \in V$, es combinación lineal del sistema, ya que

$$0 = \sum_{k=1}^n 0v_k,$$

donde los coeficientes "0" de los vectores v_k son el cero de \mathbb{R} .

b) Para cada $j = 1, 2, \dots, n$

$$v_j = 1v_j + \sum_{k=1, k \neq j}^n 0v_k.$$

c) Si $u \in V$ es combinación lineal de $\{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subset V$ y cada u_j es combinación lineal de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$, entonces u es combinación lineal de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

Demostración: c). Sean $u = \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j$ y para cada $j = 1, \dots, m$ $u_j = \sum_{k=1}^n \lambda_{j,k} v_k$. Entonces

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\sum_{k=1}^n \lambda_{j,k} v_k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \lambda_{j,k} \right) v_k \quad \square \end{aligned}$$

Definición 2. Sea V un espacio vectorial.

A) Se dice que los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ son **linealmente dependientes** si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ **no** todos nulos de modo que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = 0$$

B) Se dice que los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ son **linealmente independientes** si **no** existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ **no** todos nulos de modo que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = 0.$$

Equivalente a decir que: $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ son **linealmente independientes** si siempre que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = 0,$$

entonces

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Ejemplo 3. Sea $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ (definidos como antes). Estos vectores son linealmente independientes. En general $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ son linealmente independientes.

Demostración: Si $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$, entonces

$$\lambda_1(1, 0) + \lambda_2(0, 1) = (\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0),$$

así $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$ \square

Observación 2. Si $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ son vectores linealmente dependientes, entonces existe al menos un de ellos v_{k_0} de modo que este es combinación lineal del resto.

Demostración: Existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, no todos nulos (supongamos que $\lambda_{k_0} \neq 0$) de modo que

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k v_k = 0.$$

Despejando

$$-\lambda_{k_0} v_{k_0} = \sum_{k=0, k \neq k_0}^n \lambda_k v_k,$$

luego como $\lambda_{k_0} \neq 0$

$$v_{k_0} = \sum_{k=0, k \neq k_0}^n \frac{-\lambda_k}{\lambda_{k_0}} v_k \quad \square$$

Ejercicio 1. Dado el vector $v = (a, 2, -1, b)$ hay que hallar a y b para que v sea combinación lineal de los vectores $u_1 = (1, 2, -3, 4)$ y $u_2 = (-1, 0, -2, -3)$

Demostración: Si v es combinación lineal de u_1 y u_2 debe existir números λ_1 y λ_2 de modo que

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2;$$

igualando coordenadas llegamos al sistema

$$\begin{array}{rcl} a & = & \lambda_1 - \lambda_2 \\ 2 & = & 2\lambda_1 \\ -1 & = & -3\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ b & = & 4\lambda_1 - 3\lambda_2 \end{array} .$$

Las ecuaciones segunda y tercera nos dicen que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones primera y cuarta, se ve que necesariamente $a = 2$ y $b = 7$ para que el sistema sea compatible \square

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es