ÁLGEBRA LINEAL.

El Teorema de la Base.

Teorema 1. *Sea V un espacio vectorial y sea L un subespacio vectorial de V que está generado por los vectores $\{v_1, ..., v_n\}$ de V, es decir*

$$L = L[v_1, v_2, ..., v_n],$$

(en particular se puede considerar $L = V = [v_1, ..., v_n]$). Sean p vectores linealmente independientes de L $\{u_1, ..., u_p\}$, entonces

$$p \leq n.$$

Demostración: Vamos a hacer la prueba por inducción sobre n.

Si $n = 1$ y suponemos que $p \geq 2$, entonces existirán dos vectores linealmente independientes $u_1, u_2 \in L = L[v_1]$ y así

$$u_1 = \lambda_1 v_1 \qquad \text{y} \qquad u_2 = \lambda_2 v_1,$$

λ_1 y λ_2 no nulos. Despejando

$$u_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} u_2,$$

lo que es una contradicción. No podemos suponer $p \geq 2$, luego $p \leq 1 < 2$.

Supongamos que el resultado es cierto para $1, 2, 3, ..., n-1$.

Sea ahora $L = L[v_1, ..., v_n]$ y sean $u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1}$ $n+1$ vectores linealmente independientes en L. Veamos que llegamos de nuevo a contradicción. Escribimos:

$$\begin{array}{rclcl} u_1 & = & \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{1,k} v_k & + & \lambda_1 v_n \\ u_2 & = & \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{2,k} v_k & + & \lambda_2 v_n \\ \vdots & & & & \\ u_n & = & \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n,k} v_k & + & \lambda_n v_n \\ u_{n+1} & = & \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{(n+1),k} v_k & + & \lambda_{n+1} v_n \end{array}.$$

Si todos los $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n+1}$ son nulos, entonces por hipótesis de inducción, los vectores $u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1}$ no son linealmente independientes. Luego supondremos que algún λ_k es no nulo. Salvo reordenamiento de los vectores, podemos suponer que $\lambda_1 \neq 0$. Así despejando podemos escribir,

$$v_n = \frac{1}{\lambda_1} u_1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_{1,k}}{\lambda_1} v_k.$$

De aquí se sigue que los n vectores linealmente independientes$^{(*)}$

$$u_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} u_1, u_3 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} u_1, ..., u_{n+1} - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1} u_1$$

se pueden escribir como

$$\begin{array}{ccc} u_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} u_1 & = & \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{2,k} v_k \\ u_3 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} u_1 & = & \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{3,k} v_k \\ \vdots & & \\ u_n - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} u_1 & = & \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{n,k} v_k \\ u_{n+1} - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1} u_1 & = & \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{(n+1),k} v_k \end{array},$$

para ciertos $\beta_{j,k} \in \mathbb{R}$. Luego los vectores

$$u_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} u_1, u_3 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} u_1, ..., u_{n+1} - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1} u_1$$

pertenecen a $L[v_2, ..., v_{n-1}]$ y por hipótesís de inducción no pueden ser linealmente independientes. Lo que nos lleva de nuevo a contradicción.

$^{(*)}$¿Por qué los vectores de arriba decíamos que son linealmente independientes? Si escribimos

$$0 = \sum_{k=2}^{n+1} r_k (u_k - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} u_1) = \sum_{k=2}^{n+1} r_k u_k - (\sum_{k=2}^{n+1} r_k \frac{\lambda_k}{\lambda_1}) u_1,$$

como suponemos que los $u_1, u_2, ..., u_{n+1}$ son independientes deducimos que

$$r_2 = r_3 = ... = r_{n+1} = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=2}^{n+1} r_k \frac{\lambda_k}{\lambda_1} = 0,$$

lo que prueba la independencia $\square$

Teorema 2. *(**Teorema de la Base.**) En un espacio vectorial V finitamente generado, todas las bases tienen el mismo número de elementos.*

Demostración: Si tenemos dos bases que generan V,

$$V = L[v_1, ..., v_n] \qquad \text{y} \qquad V = L[u_1, ...u_m],$$

por el teorema anterior, por un lado

$$m \leq n;$$

cambiando los papeles de las "uves" y las "ues" se tiene que

$$n \leq m.$$

Por tanto $n = m$ $\square$

Ejemplo 1. *En $\mathbb{R}^n$ los vectores $\{e_1, ...e_n\}$ forman una base (la base canónica). Cualquier otra base de $\mathbb{R}^n$ tiene también n elementos.*

Observación 1. *Si en $\mathbb{R}^n$ tenemos n vectores linealmente independientes, entonces esos vectores forman una base.*

Demostración: Claro, supongamos que $u_1, ..., u_n$ son linealmente independientes. Si $L[u_1, ..., u_n] \subsetneq \mathbb{R}^n$, entonces existiría $u_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ independiente de los anteriores. Lo cual contradice nuestro primer Teorema tomando $v_k = e_k$ $\square$

Teorema 3. *(**de Existencia de la Base.**) Todo espacio vectorial V finitamente generado tiene al menos una base.*

Demostración: Si V es finitamente generado, existen $v_1, ...v_m \in V$ tales que

$$V = L[v_1, ..., v_m].$$

Tomamos entre $v_1, v_2, ...v_m$ el mayor número de vectores linealmente independientes. Ahora solo queda comprobar que esta elección nos da una base $\square$

Definición 1. *LLamamos **dimensión** de un espacio vectorial finitamente generado V y notamos por*

$$dim V$$

al número de elementos de cualquiera de sus bases.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es