ÁLGEBRA LINEAL

Operaciones con Matrices.

Definición 1. *Llamamos $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las matrices $n \times m$ cuyas entradas $a_{i,j}$ son elementos de $\mathbb{R}$, es decir*

$$M_{n\times m}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \quad : \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, ..., n, \;\; j = 1, ..., m \right\} =$$

o de forma más concisa

$$\{ \; (a_{i,j}) \quad : \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, ..., n, \;\; j = 1, ..., m \; \}$$

Observemos que:

$$M_{1,m}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^m \qquad \text{(con vectores fila).}$$

y

$$M_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \qquad \text{(con vectores columna).}$$

Como en el caso de los vectores de $\mathbb{R}^n$, las matrices se pueden operar.

Igualdad de Matrices: Dadas dos matrices $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, con $A = (a_{i,j})$ y $B = (b_{i,j})$, se dice que son iguales si

$$a_{i,j} = b_{i,j} \qquad \text{para todo } \; i = 1, ..., n, \;\; j = 1, ..., m.$$

Suma de Matrices: Dadas dos matrices $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, con $A = (a_{i,j})$ y $B = (b_{i,j})$, se llama matriz suma a la matriz

$$A + B = (a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (\; a_{i,j} + b_{i,j} \;).$$

Producto de una Matriz por un Escalar: Dados una matriz $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, con $A = (a_{i,j})$, y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, llamamos producto de λ por A a la matriz

$$\lambda A = \lambda(a_{i,j}) = (\; \lambda a_{i,j} \;).$$

Observemos que estas operaciones son análogas a las que tenemos en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+2 & 3+3 \\ 3+1 & 1+1 & 7+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.
$$3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 3 & 21 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Estas operaciones tienen propiedades análogas a las de las operaciones de $\mathbb{R}^n$.

Propiedades. Sean dos matrices $A, B, C \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, con $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ y $C = (c_{i,j})$, y $r, s \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $A + B = B + A$ (propiedad conmutativa de la suma).
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (propiedad asociativa de la suma).
3. Si $0 = (0)$ (la matriz con todas las entradas nulas), entonces
$$A + 0 = 0 + A = A \qquad (0 \text{ elemento neutro de la suma }).$$
4. Si para A llamamos $-A = (-1)A$, entonces
$$A + (-A) = -A + A = 0 \qquad (-A \quad \text{elemento opuesto de la suma}).$$

a: $(r + s)A = rA + sA$.
b: $r(A + B) = rA + rB$.
c: $r(sA) = (rs)A$.
d: $1A = A$.

Demostración: La demostración de estas propiedades es muy sencilla y sale de las correspondientes propiedades de las operaciones de con números reales. Así por ejemplo:

2.
$$(A + B) + C = ((a_{i,j}) + (b_{i,j})) + (c_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j}) + (c_{i,j}) =$$
$$(\,(a_{i,j} + b_{i,j}) + c_{i,j}\,) = (a_{i,j} + (b_{i,j} + c_{i,j})) = (a_{i,j}) + (B + C) =$$
$$A + (B + C)$$

a:
$$(r + s)A = (r + s)(a_{i,j}) = (\,(r + s)a_{i,j}\,) = (ra_{i,j} + sa_{i,j}) =$$
$$(ra_{i,j}) + (sa_{i,j}) = rA + sA.$$

El resto de casos se dejan como ejercicios □

Observación 1. *Más adelante diremos que $M_{n.m}(\mathbb{R})$ con las **operaciones** de la **suma** y el **producto por escalares** tiene una estructura de **Espacio Vectorial** sobre el cuerpo de los números reales (lo mismo que $\mathbb{R}^n$).*

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`