ÁLGEBRA LINEAL

Propiedades del Producto de Matrices.

La operación más importante con matrices es la **Propiedades de la Multiplicación de Matrices**.

Vamos a trabajar con **matrices cuadradas**. De todas formas, las propiedades que vamos a escribir a continuación son ciertas siempre que las operaciones que allí aparezcan tengan sentido.

Notación: para abreviar escribiremos $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = M_n$.

Proposition 0.1. *Sean A, B y $C \in M_n$, entonces*

a) $A(BC) = (AB)C$ *(Propiedad asociativa).*

b) $A(B + C) = AB + AC$ *(Propiedad distributiva).*

c) $(B + C)A = BA + CA$.

d) *Si* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ***matriz identidad**, entonces*

$$IA = AI = A \qquad (I \text{ elemento neutro del producto}).$$

Demostración: Dejamos **c)** y **d)** como ejercicios.

a) Escribimos $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ y $C = (c_{i,j})$. Sean $D = A(BC) = (d_{i,j})$ y $E = (AB)C = (e_{i,j})$, entonces

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(\sum_{t=1}^{n} b_{k,t}c_{t,j}) =$$

usando la propiedes distributiva, conmutativa y asociativa de $\mathbb{R}$

$$\sum_{t=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,t})c_{t,j} = e_{i,j}$$

para todo $i = 1, 2, .., n$ y $j = 1, 2, .., n$. Luego $D = E$.

b) Si $D = A(B + C)$ con $D = (d_{i,j})$ y $E = AB + AC$ con $E = (e_{i,j})$, entonces

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(b_{k,j} + c_{k,j}) = \sum_{k=1}^{n}(a_{i,k}b_{k,j} + a_{i,k}c_{k,j}) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} + \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}c_{k,j} = e_{i,j} \qquad \square$$

Observación 1. *En general no es cierto que para todas par de matrices $A, B \in M_n$ se tenga que $AB = BA$. Es decir, la **multiplicación de matrices no es conmutativa**.*

Ejemplo 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

en cambio

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \square$$

Dada una matriz $A \in M_n$, su matriz inversa sería otra A^{-1} de modo que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Pero esto no va siempre a existir. Claro, sea un **sistema** de n ecuaciones con n incógnitas (con matriz de coeficientes A)

$$Ax = b$$

incompatible, sin solución. En este caso no puede existir A^{-1}, ya que si existiese

$$Ax = B \qquad \Leftrightarrow \qquad A^{-1}Ax = A^{-1}b \qquad \Leftrightarrow \qquad x = A^{-1}b$$

tendríamos una solución.

Ejemplo 2. *El sistema*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 1 \\ 4x + 6y & = & 1 \end{array} \right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es incompatible, luego la matriz $A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ no puede tener inversa.

Observación 2. ***No** toda matriz $A \in M_n$ tiene matriz inversa.*

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`