ÁLGEBRA LINEAL

La Matriz Inversa.

Definición 1. *Una matriz cuadrada $A \in M_n$ se dice que tiene **matriz Inversa** respecto del producto si existe $B \in M_n$ de modo que*

$$AB = BA = I.$$

En ese caso escribimos

$$B = A^{-1},$$

*y decimos que la matriz A es **invertible**.*

Ejemplo 1. *Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Existe $B \in M_2$ tal que $AB = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?*

Demostración: Si $B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, entonces se tendría que dar que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo que es equivalente a que

$$\begin{cases} 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_3 & = & 1 \\ 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_4 & = & 0 \\ \quad a_3 & = & 0 \\ \quad a_4 & = & 1 \end{cases}.$$

Este sistema es claramente incompatible luego tal matriz B o A^{-1} no existe $\square$

Observación 1. *Si $A \in M_n$ y $X \in M_n$ es una matriz por determinar (de n^2 entradas incógnitas), si el sistema*

$$AX = I,$$

sistema de n^2 ecuaciones con n^2 incógnitas tiene solución, entonces A tiene matriz inversa.

Nos podemos preguntar, antes de resolver un sistema tan grande ¿si existe un método de conocer a priori si una matriz cuadrada tiene inversa?

¿Existe un modo más simple de encontrar la matriz inversa?

Observación 2. *Si $Ax = b$ es un sistema de n ecuaciones y n incógnitas y por tanto A es una matriz cuadrada de orden n, entonces si A tiene inversa el sistema tiene solución única y es*

$$x = A^{-1}b.$$

.

Demostración: Si $Ax = b$ y existe A^{-1}, multiplicando por A^-1

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \qquad \Leftrightarrow \qquad Ix = A^{-1}b \qquad \Leftrightarrow \qquad x = A^{-1}b.$$

Observemos que las multiplicaciones que se plantean arriba se pueden hacer $\square$

Lema 1. *Si $A \in M_n$ y es invertible, entonces A^{-1} la matriz inversa es única.*

Demostración: Supongamos que $B, C \in M_n$ son dos matrices inversas para A. Entonces como $CA = AC = I$, tenemos que

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

donde hemos usado la propiedad asociativa del producto de matrices $\square$

Lema 2. *Si $A, B \in M_n$ son invertibles, entonces AB y BA son invertibles con*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad y \qquad (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

Demostración: Usando la propiedad asociativa, en el primer caso

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I,$$

y en el segundo

$$(BA)(A^{-1}B^{-1}) = B(AA^{-1})B^{-1} = BB^{-1} = I \qquad \square$$

Teorema 1. ***(Método de Gauss-Jordan)*** *Dada una matriz $A \in M_n$ de modo que existe $B_1, ..., B_m \in M_n$, cada una de ellas invertible, tal que*

$$B_m B_{m-1} .... B_1 A = I,$$

entonces

$$A^{-1} = B_m B_{m-1} .... B_1.$$

Demostración: Sea la matriz $C = B_m B_{m-1} \dots . B_1$. Es una matriz invertible por el Lema anterior y además $CA = I$ luego es la inversa de A $\square$

Esto nos permite pensar en un método de calcular la matriz inversa de una matriz. Sea A una matriz, y se B otra. El producto de BA transforma la matriz A en otra. ¿Podemos ir haciendo sucesivas transformaciones de matrices de modo que al final lleguemos a la matriz identidad? Pensemos en el método de Gauss para triangularizar un sistema de ecuaciones.

Para contestar a esta pregunta necesitamos antes estudiar unos simples ejemplos de matrices invertibles: **las transformaciones elementales**.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`