ÁLGEBRA LINEAL

SISTEMAS DE ECUACIONES. INTRODUCCIÓN.

Para resolver muchos e interesantes problemas se necesita plantear y resolver un **sistema de ecuaciones lineales**. De hecho, casi todos los problemas del Álgebra Lineal se resuelven a través de un sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo 1. *Dado un número complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ no nulo, queremos calcular su inverso $\dfrac{1}{z} = x + yi$.*

Demostración: El inverso será un complejo $\dfrac{1}{z} = x + yi$ de modo que $z\frac{1}{z} = (a + bi)(x + bi) = 1$ es decir:

$$\begin{cases} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 0 \end{cases}$$

esto es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x e y. Este sistema, razonablemente, debería tener solución única $\square$

Ejemplo 2. *Dados dos vectores del espacio $a = (a_1, a_2, a_3)$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$ queremos encontrar otro vector $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ de modo que sea ortogonal a los dos anteriores.*

Demostración: Dos vectores del espacio, no proporcionales, determinan **un plano** y un vector ortogonal a ellos da un **vector director del plano**.

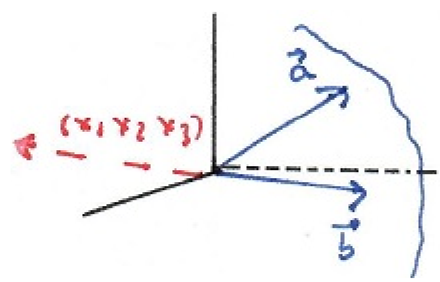

Figura 1. Vector ortogonal a un plano.

La ortogonalidad viene dada por el producto escalar (ver Apéndice sobre el Plano y el Espacio). Así tiene que ocurrir que $< x, a >= 0$ y que $< x, b >= 0$, es decir que

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & = & 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 & = & 0 \end{cases}$$

esto es un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas x_1, x_2 y x_3. Este sistema si tiene una solución $x = (x_1, x_2, x_3)$, entonces para todo $r \in \mathbb{R}$ tendría que ocurrir que rx también fuese solución. Luego no podemos esperar una única solución sino una infinitud de ellas $\square$

Ejemplo 3. *En el libro titulado "Jiuzhang Suanshu"(Nueve capítulos de la arte Matemática) de autor desconocido y datado del siglo III A.C., se encuentra el siguiente problema: CAP VII Excesos y Déficit; Problema 16:*

Supongamos que 5 corderos, 4 patos, 3 pollos y 2 conejos valen 1496 monedas. 4 corderos, 2 patos, 6 pollos y 3 conejos valen 1175 monedas. 3 corderos, un pato, 7 pollos y 5 conejos valen 958 monedas. y 2 corderos, 3 patos, 5 pollos y un conejo valen 861 monedas. Dime ¿cuál es el precio de un cordero, de un pato, de un pollo y de un conejo?

(Sacado del Libro de Josep Pla I Carrera,"Liu-Hui, nueve Capítulos de la Matemática China" e.d. Nivola).

Demostración: El enunciado anterior se puede escribir de la siguiente manera:

- x_1 las monedas que cuesta un cordero.
- x_2 las monedas que cuesta un pato.
- x_3 las monedas que cuesta un pollo.
- x_4 las monedas que cuesta conejo,

entonces tendremos que

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & 1496 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 & = & 1175 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 & = & 958 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 & = & 861 \end{cases}$$

esto es un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas $\square$

¿Como resolvemos los sistemas que nos han salido en los tres ejemplos anteriores ? La respuesta a esta pregunta es muy antigua.

El libro "Jiunzhang Suanshu" es un compendio de problemas de matemáticas de uso práctico (S. III A.C.) En el año 260 D.C. Liu Hui hace un comentario del libro "Jiunzhang Suanshu" (es decir escribe otro libro). Y es allí donde aparece lo que hoy llamamos el **Método de Eliminación de Gauss** para resolver sistemas como los anteriores. Este método conocido como el **Método del Pivote o de Gauss** fué redescubierto por G.W. Leibniz (1646-1716), quién lo comunicó al Marqués de L'Hôpital en carta fechada el 28 de Abril de 1663 (C.F. Gauss 1777-1855).

¿Cuál es el Método de Eliminación, que nosotros llamamos de Gauss, y que ya se conocía en la matemática china 2.200 años antes?

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
Email address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`