

ÁLGEBRA LINEAL

Propiedades de los Sistemas Lineales.

Dado un sistema lineal de n ecuaciones y m incógnitas (1) ¿cómo lo resolvemos?

$$(1) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,m}x_m &= b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,m}x_m &= b_n, \end{cases}$$

Si el sistema fuese de forma **Triangular**, es decir de la forma

$$(2) \quad \begin{cases} c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + \dots + c_{1,m}x_m &= b_1 \\ c_{2,2}x_2 + \dots + c_{2,m}x_m &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ c_{k,k}x_k + \dots + c_{k,m}x_m &= b_k \\ \vdots & \vdots \\ c_{n,m}x_m &= b_n, \end{cases}$$

Este sistema triangular es fácil de resolver, ya que despejando en la última ecuación

$$x_m = \frac{b_n}{c_{n,m}}.$$

Ahora, la penúltima ecuación queda

$$c_{n-1,m-1}x_{m-1} + c_{n-1,m}x_m = c_{n-1,m-1}x_{m-1} + c_{n-1,m} \frac{b_n}{c_{n,m}} = b_{n-1}$$

y despejando

$$x_{m-1} = \frac{1}{c_{n-1,m-1}} \left(b_{n-1} - c_{n-1,m} \frac{b_n}{c_{n,m}} \right).$$

Y así subiendo hacia atrás vamos encontrando los distintos valores de x_j con $j = 1, 2, \dots, m$ (Observemos que lo anterior tiene perfecto sentido si $n = m$, en otro caso ya veremos que pasa).

Ejemplo 1.

$$\begin{array}{rcccccl} 3x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 2y & - & z & = & 2 \\ & & & & 2z & = & 4 \end{array}$$

Demostración: Despejando en la última ecuación $z = 2$. Ahora la segunda ecuación queda $2y - 2 = 2$ y despejando $y = 2$. Sustituyendo en la primera ecuación los valores de z e y , tenemos que $3x + 2 + 2 = 1$. Despejando $x = -1$. Una solución única. $\square$

Ejemplo 2.

$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 1 \\ 2y - z &= 2 \end{aligned}$$

Demostración: Despejando en la segunda ecuación $y = \frac{2+z}{2}$. Ahora la primera ecuación queda $3x + \frac{2+z}{2} + z = 1$. Despejando $x = \frac{1}{3}(1 - \frac{2+z}{2})$, para todo $z \in \mathbb{R}$. Tenemos infinitas soluciones $\square$

El **Método de Eliminación de Gauss** consiste en pasar de un sistema cualquiera (1) a otro **triangular** de tipo (2) que tenga las mismas soluciones que el primero.

Para poder hacer tal transformación necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 1. Sea un sistema lineal de n ecuaciones lineales y m incógnitas,

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,m}x_m &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,m}x_m &= b_n, \end{aligned}$$

y S el conjunto de las soluciones del sistema. Entonces

1. si intercambiamos el orden de dos ecuaciones del sistema lineal, el sistema resultante tiene las mismas soluciones que el primero.
2. Si a una ecuación la "multiplicamos por un escalar", el sistema resultante tiene las mismas soluciones que el primero.
3. Si a cualquier ecuación del sistema "la sumamos" otra ecuación "multiplicada" por un escalar, el sistema resultante tiene las mismas soluciones que el primero.

En la prueba se ve de forma clara que significa "multiplicamos por un escalar" a una ecuación y lo que es la "suma" de dos ecuaciones.

Demostración: Parece claro que si $x_1, x_2, \dots, x_m$ es una solución del problema

$$\begin{array}{ll} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,m}x_m = b_1 & a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,m}x_m = b_2 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,m}x_m = b_2 & a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{3,1}x_1 + \dots + a_{3,m}x_m = b_3 & \text{también lo es de } a_{3,1}x_1 + \dots + a_{3,m}x_m = b_3 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,m}x_m = b_n & a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,m}x_m = b_n \end{array}$$

Observemos que intercambiar las ecuaciones una y dos o las ecuaciones i y k cualesquiera produce el mismo efecto.

Por otro lado si $x_1, x_2, \dots, x_m$ verifican que

$$a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,m}x_m = b_i,$$

entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ también es cierto que

$$\lambda(a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,m}x_m) = \lambda a_{i,1}x_1 + \dots + \lambda a_{i,m}x_m = \lambda b_i$$

independientemente de que ecuación i hallamos tomado.

Por último si $x_1, x_2, \dots, x_m$ es una solución del problema

$$(*) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,m}x_m &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,m}x_m &= b_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,m}x_m &= b_i \\ \vdots &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,m}x_m &= b_n \end{cases}$$

y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces también es cierto que

$$\lambda a_{1,1}x_1 + \dots + \lambda a_{1,m}x_m = \lambda b_1$$

y por tanto que para estos $x_1, x_2, \dots, x_m$ se verifica también que

$$(**) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,m}x_m &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,m}x_m &= b_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,m}x_m + \lambda(a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,m}x_m) &= b_i + \lambda b_1 \\ \vdots &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,m}x_m &= b_n \end{cases}$$

o lo que es lo mismo

$$(**) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,m}x_m &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,m}x_m &= b_2 \\ \vdots &\vdots \\ (a_{i,1} + \lambda a_{1,1})x_1 + \dots + (a_{i,m} + \lambda a_{1,m})x_m &= (b_i + \lambda b_1) \\ \vdots &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,m}x_m &= b_n \end{cases}$$

Observemos que si en lugar de sumar la ecuación 1 hubiesemos sumado cualquier otra el resultado no cambia.

Al contrario, si $y_1, y_2, \dots, y_m$ es una solución del sistema $(**)$, entonces en particular

$$a_{1,1}y_1 + \dots + a_{1,m}y_m = b_1$$

y así también es cierto que

$$\lambda a_{1,1}y_1 + \dots + \lambda a_{1,m}y_m = \lambda b_1$$

y como

$$(a_{i,1} + \lambda a_{1,1})y_1 + \dots + (a_{i,m} + \lambda a_{1,m})y_m = (b_i + \lambda b_1)$$

se deduce que

$$a_{i,1}y_1 + \dots + a_{i,m}y_m = b_i,$$

luego $y_1, y_2, \dots, y_m$ es una solución del sistema (*) $\square$

Ejercicio 1. *Dado un sistema de ecuaciones lineales homogéneo:*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,m}x_m = 0, \end{cases}$$

y sea S el conjunto de sus soluciones. Se tiene que

- A) $0 = (0, 0, \dots, 0) \in S$.
- B) Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in S$, entonces $x + y \in S$.
- C) Si $x \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda x \in S$

Ejercicio 2. *Sea un sistema de ecuaciones lineales*

$$(1) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,m}x_m = b_n, \end{cases}$$

y sea el sistema homogéneo asociado al anterior

$$(2) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,m}x_m = 0, \end{cases}$$

Sea S es conjunto de soluciones del sistema homogéneo S y llamemos S' al conjunto de soluciones del sistema (1). Prueba que

- a) si $x, y \in S'$ entonces $y - x \in S$.
- b) Si $x \in S$ e $y \in S'$, entonces $x + y \in S'$.
- c) Si y es una **solución particular** del sistema (1), entonces

$$S' = \{ y + x \quad : \quad x \in S \}.$$

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es